

Étude du comportement chaotique d'un laser à fibre

Pierre VANHOVE  
le 30 juin 1993

Je remercie Pierre GLORIEUX d'avoir bien voulu m'accueillir au Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de Lille I. Je remercie Marc LEFRANC, mon responsable de stage, pour l'aide qu'il m'a apportée durant ce mois de stage. Un très grand merci à Dominique DEROZIER et Serge BIELAWSKI pour leur aide, leurs explications et leur grande patience. Je remercie également tous les membres du LSH qui m'ont parfaitement accueilli dans leur laboratoire.

**Avertissement :** Ce document avait été écrit avec Word sur Macinstosh. Une erreur de jeunesse. La transcription en T<sub>E</sub>X fut douloureuse et n'est pas complète. Je prie le lecteur d'excuser l'horrible mise en page.

- 1) **Introduction**
- 2) **Le laser à fibre**
  - 2.1 - Montage du laser
  - 2.2 - Réglage du laser
  - 2.3 - Caractéristiques du laser
- 3) **Les méthodes de la physique non linéaire**
  - 3.1 - L'espace des phases
  - 3.2 - Stabilité linéaire et bifurcations
  - 3.3 - Étude générale d'un flot dans  $\mathbb{R}^n$
- 4) **Une étude de la topologie des attracteurs étranges**
  - 4.1 - Extraction des orbites périodiques
  - 4.2 - Bases de la théorie des noeuds
  - 4.3 - Quelques invariants topologiques
- 5) **Résultats expérimentaux**
- 6) **Conclusion**

## 1 – INTRODUCTION

Le chaos déterministe se manifeste dans de nombreux systèmes physiques aussi différents que les circuits électroniques (voir l'équation de Van der Pol [1]), les écoulements fluides (instabilités de Bénard-Marrangoni), certains systèmes mécaniques (cf le problème de la balle qui rebondit sur une table en oscillation [2]) et aussi en optique non linéaire dans les lasers tels que le laser  $\text{CO}_2$  à modulation de pertes [3]. De nombreuses études sur les systèmes chaotiques sont menées aussi bien au niveau théorique qu'expérimental.

Nous avons travaillé sur un laser à fibre optique dopée.

Ce système possède quatre paramètres principaux [4] :

- la puissance de la pompe (modulée sinusoïdalement)
- le couplage entre la pompe et la fibre
- l'orientation des miroirs de la cavité
- la torsion de la fibre

Bien que les trois derniers paramètres soient difficilement ajustables ils influent beaucoup sur la dynamique du laser.

L'existence de deux directions propres de polarisation favorise grandement l'apparition d'un comportement chaotique. Notons aussi que les temps de réponse assez courts, de l'ordre de la milliseconde, permettent d'obtenir rapidement des diagrammes de bifurcation qui traduisent les changements de comportement du laser lorsque un ou plusieurs paramètres varient.

Notre étude a porté, en particulier, sur la mise en évidence expérimentale du gabarit, c'est à dire la surface à deux dimensions à plusieurs branches qui détermine l'organisation globale des orbites périodiques instables [10], de l'attracteur du laser lorsque celui-ci est soumis à une modulation.

## 2 – LE LASER À FIBRE

### 2.1 – MONTAGE DU LASER

Le laser utilisé est essentiellement composé d'une fibre optique dopée au Néodyme pompée par une diode laser. Le schéma optique du montage est représenté sur la figure 1.

Le montage se compose de trois parties :

-Le dispositif de pompage constitué d'une diode laser (RTC Philips CQL 44) émettant à 820 nm monomode transverse et polarisée rectilignement. Deux objectifs de microscope de grossissement  $\times 10$  focalisent le faisceau fortement divergent issu de la diode laser. Un miroir dichroïque, de facteur de transmission maximal à 820 nm et de facteur de réflexion maximal à  $1.08 \mu\text{m}$ , est utilisé pour atténuer fortement le retour du laser à fibre sur la diode laser.

-La cavité laser formée de deux miroirs transparents pour la pompe présentant des pouvoirs de réflexion respectifs de  $R_1 > 99.5 \%$  et  $R_2 = 95 \%$  à  $1.08 \mu\text{m}$ , la longueur d'onde d'émission du laser. La fibre optique est appliquée contre le miroir  $M_1$  par l'intermédiaire d'un liquide adaptateur d'indice destiné à minimiser les pertes.

-Le système de détection comprend une lame demi-onde pour pouvoir choisir les polarisations envoyées sur chaque détecteur. Un cube polariseur qui envoie à  $90^\circ$  les deux polarisations, suivi d'un filtre qui ne laisse passer que le rayonnement du laser en éliminant la radiation à  $820 \text{ nm}$  de la pompe. La mesure de l'intensité du rayonnement du laser à fibre est effectuée par deux photodiodes au silicium.

## 2.2 – RÉGLAGE DU LASER

Le réglage se déroule en deux temps. On aligne d'abord la diode laser avec la fibre optique puis on régle la cavité.

On place juste derrière le miroir  $M_2$  un détecteur de très grande sensibilité. La puissance de la diode étant au maximum on régle l'alignement avec la fibre au moyen de trois vis qui définissent un trièdre orthogonal qui modifient la position du miroir  $M_1$ . La position de la fibre est ajustée de façon à détecter un maximum de puissance en sortie. On peut modifier l'orientation du miroir  $M_1$ , mais ce réglage est délicat et nécessite un nouveau réglage des vis du support de  $M_1$  à chaque changement d'orientation du miroir.

Lorsque l'alignement est correct on place un détecteur de haute sensibilité derrière un filtre qui élimine la radiation de la pompe. On ajuste l'orientation de  $M_1$  et les vis du support jusqu'à détecter la fluorescence de la fibre (i.e. rayonnement du laser dû uniquement à l'émission spontanée). Une fois la fluorescence détectée, on affine le réglage pour obtenir l'effet laser et on maximalise la puissance émise par la fibre optique.

Pendant le réglage du laser nous avons rencontré des problèmes d'auto-oscillation qui ont pu être éliminés en modifiant la cavité Fabry-Pérot du laser ou en tordant la fibre optique.

Tordre, pincer ou tendre la fibre fait varier notablement son comportement dynamique, car on modifie la biréfringence du milieu optique et change le couplage entre les deux modes de polarisations [4].

## 2.3 – CARACTÉRISTIQUES DU LASER

La fibre utilisée a été fournie par le CNET. Elle est dopée au Néodyme  $\text{Nd}^{3+}$  à  $300 \text{ ppm}$ . Sa longueur est de  $4.5 \text{ m}$ , le diamètre du cœur est de  $5.8 \mu\text{m}$  avec un indice de  $1.5$ . Le saut d'indice est de  $6.5 \cdot 10^{-3}$ . La fibre est pompée à  $820 \text{ nm}$ , le laser émettant à  $1.08 \mu\text{m}$  (fig 2). La puissance de pompe couplée avec la fibre varie entre  $0$  et  $8 \text{ mW}$ , la puissance du seuil à partir duquel le laser émet est de l'ordre de  $2 \text{ mW}$ . Ce laser à fibre est monomode transverse et fortement multimode longitudinal (une centaine de modes ont été détectés). Cependant les résultats expérimentaux montrent que les modes sont répartis en deux groupes de directions

propres de polarisation. On constate un comportement collectif des modes dans chacun des groupes, puisque l'intensité d'un groupe évolue en antiphase par rapport à l'autre.

Ce comportement est assez bien décrit par un système de deux lasers couplés selon [4,7]:

$$\dot{m}_i = (d_i + \beta d_j - 1)m_i + a(d_i + \beta d_j)$$

$$\dot{d}_i = \gamma(d_i^0(\tau) - (1 + m_i + \beta m_j)d_i)$$

avec  $i = 1, 2$  et  $j = 3 - i$

$m_i$  et  $d_i$  sont les intensités et inversions de population réduites. La dérivation est faite par rapport au temps réduit  $\tau = t/\tau_c$  où  $\tau_c$  est la durée de vie du photon dans la cavité.  $d_i^0(\tau)$  est la puissance de pompe modulée :  $d_i^0(\tau) = d_i^0(1 + r \cos(\Omega\tau))$ .

$\gamma = \tau_c/\tau_f$  avec  $\tau_f$  le temps de relaxation de l'inversion de population.

Le coefficient  $a$  représente l'émission spontanée. Celle-ci n'est pas négligeable lorsque l'on met le laser en marche, car elle rend imparfaite la bifurcation au niveau du seuil (fig 3).

Le coefficient  $\beta$  traduit le couplage entre les deux lasers. Par souci de simplicité, on a pris ce couplage identique pour l'émission spontanée et induite.

La recherche des solutions stationnaires de ce système d'équation est compliquée et hors du propos de cet exposé. On se reportera à l'article de D. Derozier *et al.* [4] pour une étude détaillée.

Généralement le laser possède un seuil différent pour chaque direction propre de polarisation (fig 4), on peut modifier cette dissymétrie en changeant la biréfringence de la fibre.

En augmentant la fréquence de modulation à partir de 0 kHz on observe une première résonance entre 6 et 8 kHz et une seconde entre 14 et 16 kHz. Les fréquences de résonance dépendent de la puissance couplée entre la diode de pompe et la fibre optique. Celles-ci augmentent avec la puissance injectée. Plus exactement le carré des fréquences de résonance est une fonction linéaire du taux de pompage [4].

On remarque que les deux intensités sont en phase pour les hautes fréquences, mais qu'elles sont en antiphase, c'est à dire qu'un grand pic de l'une correspond à un petit pic de l'autre (fig 5), pour les basses fréquences. Le comportement en antiphase des deux intensités se manifeste dès la période  $2T$  ( $T$  est la période de la modulation appliquée à la diode).

Lorsque le laser est soumis à une impulsion on observe l'apparition d'une fréquence basse dans les oscillations de relaxation. La fréquence des oscillations de relaxation diminue avant que celles ci soient complètement amorties.

### 3 – LES MÉTHODES DE LA PHYSIQUE NON LINÉAIRE

Les systèmes dynamiques se répartissent en deux classes.

Les systèmes conservatifs ou Hamiltoniens, c'est à dire sans perte d'énergie, et les systèmes dissipatifs. Le laser à fibre est un système dissipatif.

Nous allons maintenant rappeler quelques méthodes générales, mais fondamentales, de la physique non linéaire.

#### 3.1 – L'ESPACE DES PHASES

L'*espace des phases* est l'espace dans lequel est étudiée l'évolution des systèmes dynamiques. Dans le cas d'un système Hamiltonien, par exemple, celui-ci est construit en prenant comme référence les variables canoniques et leur moment conjugué.

Dans notre cas l'espace est de dimension quatre (en fait la modulation ajoute une dimension à l'espace des phases qui devient  $R^4 \times S^1$ ). Comme le système est décrit par quatre équations du premier ordre nous prenons comme variable les intensités émises selon chaque polarisation  $I_1$  et  $I_2$  ainsi que leurs dérivées par rapport au temps.

L'espace des phases est souvent utilisé pour représenter l'évolution d'un système décrit par des équations différentielles non intégrables.

Prenons l'exemple du pendule pesant non amorti (fig 6). Son mouvement est donné par l'équation :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

L'espace des phases  $(\theta, \dot{\theta})$  (fig 6) permet de représenter les trajectoires suivies par le système. Les cercles concentriques les plus proches de du centre correspondent à l'approximation linéaire  $\sin \theta \approx \theta$  et les courbes non fermées signifient que le pendule tourne autour de son point d'attache pendant un temps infini.

Souvent l'espace des phases n'est pas directement accessible à l'expérimentateur car on a en général accès qu'à un nombre insuffisant de variables dynamiques. Mais on peut reconstruire la topologie de l'attracteur [1,9] en prenant comme espace de représentation, soit  $X(t), \dot{X}(t), \ddot{X}(t), \dots$ , soit  $X(t), X(t + \tau), X(t + 2\tau), \dots$ , (où  $\tau$  est une constante arbitraire appelée retard). Nous n'aurons pas une représentation identique à celle de l'attracteur dans l'espace des phases, mais cette représentation conserve les propriétés topologiques de celui-ci.

#### 3.2 – STABILITÉ LINÉAIRE ET BIFURCATIONS

L'étude d'un système dynamique se ramène le plus souvent à une équation différentielle de la forme  $d\mathbf{X}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$  appelée *champ de vecteur*. Lorsque  $\mathbf{F}$  ne dépend pas explicitement du temps on dit que le champ de vecteurs est autonome sinon il est dit non autonome. L'étude d'un champ de vecteurs commence par la détermination des solutions stationnaires  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) =$

**0** qui donneront l'organisation des trajectoires dans l'espace des phases, puis de leur stabilité déterminée par une analyse linéaire.

Appliquons ceci à l'exemple de l'oscillateur paramétrique [1] donné par :

$$\ddot{\theta} - (\epsilon - \theta^2)\dot{\theta} + \theta = 0 \quad (1)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre sans dimension.

On peut réécrire cette équation sous la forme du champ de vecteurs suivant :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = x \\ \dot{x} = (\epsilon - \theta^2)x + \theta \end{cases} \quad (2)$$

L'état stationnaire donné par  $\dot{\theta} = 0$  et  $\dot{x} = 0$  est  $x = 0$  et  $\theta = 0$ .

Pour connaître la stabilité du point fixe on linéarise les équations autour de ce point :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ x \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice sont données par l'équation caractéristique :

$$X^2 - \epsilon X + 1 = 0$$

On trouve deux racines réelles  $\lambda_{\pm} = (\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4})/2$  pour  $\epsilon < -2$  et  $\epsilon > 2$  et deux racines complexes conjuguées  $\lambda_{\pm} = (\epsilon \pm i\sqrt{4 - \epsilon^2})/2$  pour  $-2 < \epsilon < 2$ .

On en déduit que  $(0, 0)$  est stable si  $\epsilon < 0$ , instable si  $\epsilon > 0$  (fig 7 a). Lorsque  $\epsilon > 0$  la solution stationnaire  $(0, 0)$  est instable, mais la présence de termes non linéaires avec un coefficient négatif dans (2) (voir  $-\theta^2 x$ ) nous assure que les trajectoires ne divergeront pas à l'infini. On peut donc conclure à l'existence d'un *cycle limite* (fig 7 b)

Toutes les trajectoires convergent vers l'origine des coordonnées pour  $\epsilon < 0$  ou vers un cycle limite pour  $\epsilon > 0$ , ces deux ensembles limites sont appelés *attracteurs*, puisqu'ils attirent les trajectoires. Il est capital de noter que les termes non linéaires de (1) n'entrent pas en compte pour la stabilité des solutions stationnaires. Ils donnent uniquement la forme du *bassin d'attraction*, c'est à dire de l'ensemble des conditions initiales des solutions qui convergent vers l'attracteur.

Remarquons que pour  $\epsilon < 0$  nous avons un point fixe stable  $(0,0)$  qui se déstabilise au profit d'un cycle limite quand  $\epsilon$  passe par 0. C'est un exemple de *bifurcation* (fig 8).

Il existe d'autres types d'attracteur [1], par exemple les *attracteurs étranges*. Ces attracteurs se distinguent par des propriétés peu communes, dont la cruciale sensibilité aux conditions initiales. Celle-ci a pour conséquence, que deux trajectoires initialement aussi voisines que l'on veut, finissent toujours par s'écarter l'une de l'autre. Leur écart augmente en moyenne exponentiellement au cours du temps (fig 9). Deux trajectoires, pratiquement confondues au départ, n'ont plus rien de commun entre elles au bout d'un temps fini. C'est l'origine des

spectres de Fourier à bandes larges continues et de l'imprédictibilité des attracteurs étranges. Ceux-ci ont une topologie tout à fait particulière car ils présentent une structure fractale. Leur dimension fractale est le plus souvent non entière.

### 3.3 – ÉTUDE GÉNÉRALE D'UN CHAMP DE VECTEURS DANS $\mathbb{R}^n$

L'étude d'un champ de vecteurs  $d\mathbf{X}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$  dans  $\mathbb{R}^n$  est rarement aisée surtout lorsque la dimension de l'espace est élevée. Mais Poincaré a remarqué qu'en général pour étudier un champ de vecteurs on peut restreindre son étude à un (hyper)plan de dimension  $n - 1$  [8] transverse au champ de vecteurs. On effectue alors une *section de Poincaré* (fig 10).

Les propriétés topologiques du champ de vecteurs sont conservées lorsque l'on fait une telle section [1] et on transforme un système continu en un système discret. Par exemple la section de Poincaré d'une orbite de période  $T$  donnera un point, celle d'une orbite de période  $2T$  donnera deux points.

Dans cette section on peut en général définir une *application de premier retour* qui associe la  $n$ ème intersection du champ de vecteurs avec le plan  $P_n$  à la  $n+1$ ème intersection  $P_{n+1} = T(P_n)$ . Les intersections prises en compte sont celles qui correspondent à un *même sens* d'intersection du champ de vecteurs avec le plan de section (fig 10). Ainsi les orbites de période  $T$  vérifient  $P_{n+1} = P_n$ .

On peut ensuite déterminer la stabilité de l'orbite par la méthode dite de *Floquet* [1]. On considère un point  $M_0$  distant de  $\delta\mathbf{x}$  du point d'intersection  $P$  de l'orbite avec la section de Poincaré (fig 11). Après une période la nouvelle intersection est  $M_1 = T(M_0)$ . En développant au premier ordre en  $\delta\mathbf{x}$  nous obtenons :

$$M_1 = P + \mathbf{J}\delta\mathbf{x}$$

où  $\mathbf{J}$  est la matrice de Floquet  $\mathbf{J} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}$ .

Ainsi la distance à l'orbite est après  $n$  itérations  $\mathbf{J}^n \delta\mathbf{x}$ . La stabilité de l'orbite est donnée par les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{J}$ . Si une des valeurs propres est supérieure à 1 en module une trajectoire initialement proche de l'orbite de référence divergera suivant la direction propre associée à cette valeur propre, le cycle est donc instable. Par contre si toutes les valeurs propres sont de module inférieur à 1 le cycle est stable.

Nous avons trois façons de franchir le cercle unité :

- par  $\lambda = +1$  on a une bifurcation nœud-col
- par  $\lambda = -1$  ce qui correspond à un doublement de période (cascade sous-harmonique)
- par deux valeurs propres complexes conjuguées c'est la bifurcation de Hopf.

Exposons maintenant comment réaliser expérimentalement une section de Poincaré. Dans le cas du laser à fibre nous nous sommes placés dans le plan défini par les intensités  $I_1$  et  $I_2$  à phase de modulation constante. Pour cela les intensités recueillies à la sortie des détecteurs sont envoyées dans deux échantillonneurs  $5 \mu\text{s}$  déclenchés sur le front montant du signal (fig 12).

Les deux échantillonneurs sont synchronisés par le signal de synchronisation de la modulation. Leur sortie est reliée à une voie A ou B d'un oscilloscope double trace. On observe le signal en mode XY avec A fonction de B. On peut faire varier l'orientation de la section de Poincaré en ajoutant un retard variable produit par un générateur d'impulsion placé avant l'entrée de synchronisation des échantillonneurs (fig 12).

La présence de deux variables dynamiques indépendantes, les deux intensités  $I_1$  et  $I_2$ , nous a permis d'obtenir facilement des sections de Poincaré de notre attracteur.

Mais lorsque l'on ne dispose que d'une variable dynamique il est plus aisé de tracer des *diagrammes de premier retour*. Un tel diagramme représente l'application qui relie une composante de la  $n$ ème intersection du champ de vecteurs à une composante de la  $(n+1)$ ème  $X_{P_{n+1}} = T(X_{P_n})$ . Le montage ressemble fortement à celui utilisé pour les sections de Poincaré mais les deux échantillonneurs sont montés en cascade le premier étant déclenché sur le front descendant de la synchronisation et nous donne  $P_{n+1}$ , le second, dont l'entrée est reliée à la sortie du premier, est déclenché par le front montant de la synchronisation et nous donne  $P_n$ . (fig 13)

## 4 – UNE ÉTUDE DE LA TOPOLOGIE DES ATTRACTEURS ÉTRANGES

Nous avons vu (§ 3 2) un exemple de bifurcation. Lorsqu'un paramètre varie, le comportement du système périodique ou quasipériodique se déstabilise et donne naissance à un nouveau régime. En faisant croître un des paramètres de contrôle du système nous observons un succession de bifurcations puis du chaos (fig 14). L'étude du comportement chaotique d'un système n'est pas aisé et demande souvent l'utilisation de mathématiques compliquées. Nous allons maintenant exposer une méthode pour reconstruire la topologie de l'attracteur chaotique du système en utilisant la théorie des nœuds et des gabarits [10, 11, 12].

Cette méthode est basée sur la constatation que tout attracteur étrange constitue une *orbite dense*, c'est à dire qu'il visite le voisinage de chacun de ses points, et une infinité *dense* d'orbites périodiques instables. Il suffit donc de connaître la disposition des orbites périodiques entre elles pour déterminer la topologie de l'attracteur.

### 4.1 – EXTRACTION DES ORBITES PÉRIODIQUES

La première étape de l'étude de l'attracteur est l'extraction des orbites périodiques du signal chaotique. Pour enregistrer l'intensité du laser suivant une polarisation nous avons relié une des photodiodes au silicium à une voie d'un oscilloscope numérique LECROY de 125 MHz de bande passante, déclenché sur le front montant du signal de modulation. Cet oscilloscope a été choisi parce qu'il donne 32000 points à chaque enregistrement. La base de temps de l'oscilloscope a été réglée pour avoir une moyenne de 50 points par période, ce qui fait  $1.5 \mu s$  par point car les

fréquences de résonance sont de l'ordre de 15 kHz. Le transfert est effectué vers un ordinateur HP 98786A, les données ont été ensuite transférées sur un Compaq 386/20.

Comme le laser s'éteint quasiment lorsqu'il passe par un minimum d'intensité le signal présente des minima très plats et très larges (fig 5). Ceci rend difficile l'analyse du signal puisque nous avons une forte indétermination sur les zones où l'intensité est faible. Pour lever cette indétermination nous avons ajouté entre la sortie du détecteur et l'entrée de l'oscilloscope un amplificateur logarithmique à offset réglable, de gain 60 dB et de fréquence de coupure 1 MHz.

Le programme chargé d'extraire les orbites périodiques est basé sur la méthode des *retours proches* (close returns). Le programme cherche les séquences temporelles vérifiant la relation  $X(t) - X(t + pT) < \epsilon$ , où  $p$  est un entier naturel et la  $\epsilon$  précision souhaitée, pendant au moins  $p$  périodes de modulation, c'est à dire pour  $t$  variant entre  $t_0$  et  $t_0 + pT$ . Le programme identifie ces séquences à des morceaux d'orbite de période  $pT$ . Enfin le programme compare les différentes orbites de même période, identifie celles identiques (même séquence temporelle) et les réunit en une seule orbite.

Même si la densité des orbites périodiques dans l'attracteur nous garantit le succès d'une telle méthode, on se doit de signaler la grande facilité avec laquelle le programme extrait des orbites périodiques.

Lorsque les orbites périodiques ont été extraites de l'attracteur il reste à déterminer comment elles sont disposées dans  $\mathbb{R}^3$ .

## 4.2 – BASES DE LA THÉORIE DES NŒUDS

Lorsque l'on se donne deux courbes de  $\mathbb{R}^3$  celles ci peuvent être liées (fig 16) ou pas. Si on se donne une seule courbe celle-ci peut être nouée (fig 15). Même si la notion de courbes liées et de nœud est assez intuitive : deux cordes sont liées si on ne peut pas les séparer sans couper une des cordes. Il faut quand même donner quelques définitions mathématiques qui nous permettront de calculer les invariants topologiques attachés à ces nœuds [13].

Premièrement deux nœuds sont équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite de mouvement de Reidemester (fig 17) [14]. Ainsi les liens 1 et 3 de la figure 19 sont liés alors que deuxième lien est équivalent à deux courbes séparées.

## 4.3 – QUELQUES INVARIANTS TOPOLOGIQUES

Il nous faut caractériser les différents types de nœuds pour cela on définit des invariants topologiques. C'est à dire des quantités qui ne changent pas lorsque l'on déforme continuellement les nœuds. L'invariant le plus intuitif est *le nombre d'enlacement* (linking number). On oriente chaque brin et l'on associe un signe à chaque croisement selon la convention de la figure 18.

Le nombre de liens est la demi-somme des signes de tous les croisements (fig 19):

$$lk = \frac{1}{2} \sum \sigma_i$$

Pour comprendre plus finement l'organisation des orbites périodiques instable dans l'attracteur on introduit la notion de *taux de rotations relatifs*. Ceux-ci permettent de calculer le nombre de tours moyen qu'une orbite fait autour d'une autre ou sur elle même pendant une période. Pour cela on considère une section de Poincaré et l'on regarde l'évolution du vecteur  $\Delta \mathbf{r} = (x_a - x_b, y_a - y_b)$  pris entre deux points A et B appartenant respectivement à l'orbite de période  $p_a$  et  $p_b$  (fig 20). Lorsque l'on parcourt les orbites périodiques, le nombre de tours qu'a effectué  $\Delta \mathbf{r}$  donne la valeur du taux de rotation relatif :

$$R_{(i,j)} = \frac{1}{2\pi p_a p_b} \int d \left[ \arctan \left( \frac{\Delta r_2}{\Delta r_1} \right) \right]$$

$i$  variant entre 1 et  $p_a$ ,  $j$  entre 1 et  $p_b$

Pour calculer les taux de rotations relatifs on peut représenter les orbites comme deux brins de cordes (fig 21). On découpe les orbites A et B en segments respectivement de longueurs  $p_a$  et  $p_b$ . On attribue un signe à chaque croisement selon :

$$\sigma_{(i,j)} = \begin{cases} +1 & \text{si } A_i \text{ passe au dessus de } B_j \text{ de la gauche vers la droite} \\ -1 & \text{si } A_i \text{ passe en dessous de } B_j \text{ de la gauche vers la droite} \\ 0 & \text{si } A_i \text{ ne coupe pas } B_j \end{cases}$$

le taux de rotation relatif vaut alors :

$$R_{(i,j)} = \frac{1}{2p_a p_b} \sum_{n=1}^{p_a p_b} \sigma_{(i+n, j+m)}$$

Le 1er indice est calculé modulo  $p_a$ , le 2ème modulo  $p_b$ .

Pour avoir une idée plus précise de la façon dont s'organisent les orbites on définit le *gabarit* de l'attracteur. Nous allons exposer une construction heuristique du gabarit, pour des définitions mathématiques plus précises on se reportera à l'article de Holmes [14].

Considérons une application de premier retour d'un attracteur correspondant à la formation d'un fer à cheval de Smale [1]. La figure 22 représente l'évolution d'un rectangle S dans le champ de vecteur. On constate que les rectangles  $H_1$  et  $H_2$  sont comprimés suivant la direction stable de l'attracteur et qu'ils sont étirés suivant la direction instable. La torsion de l'une des deux branches peut être caractéristique du fer à cheval. Supposons notre système forcé, alors la représentation la plus simple du fer à cheval de Smale est donnée par la figure 23 a, mais elle n'est pas unique. Le nombre de tours de chaque bande sur elle-même est la *torsion* de l'orbite qui passe par cette branche. Sur la figure 23 b il y a deux branches celle de gauche a une torsion de +2 (en unité de demi-tour) et celle de droite une torsion de +3. Ainsi pour une orbite qui passe par la branche de gauche (resp. droite) les trajectoires voisines font 2 (resp. 3) demi-tours autour de l'orbite elle-même. Lorsqu'une orbite passe par plusieurs branches sa torsion est donnée par

la somme des torsions de chaque branche. Comme la branche de gauche passe d'abord au dessus puis en dessous de la branche de droite (fig 23 b), les orbites tracées sur la branche de gauche passeront au dessus puis en dessous des orbites tracées sur la branche droite. Pour achever la construction du gabarit on projette la direction stable sur la direction instable (fig 24). Et enfin on identifie les bords des bandes.

Ainsi la connaissance du gabarit nous donne comment les orbites périodiques sont disposées dans  $\mathbb{R}^3$ , donc la topologie de l'attracteur (fig 25). De plus on peut facilement associer une structure de groupe à chaque gabarit ainsi qu'une matrice d'entrelacement [1, 11] ce qui permet une analyse algébrique simple des attracteurs.

Les expériences nous donnent différentes orbites périodiques instables comprises dans l'attracteur. Donc pour vérifier si le gabarit trouvé correspond à l'attracteur observé, on y place les orbites périodiques extraites du signal chaotique. S'il n'y a pas compatibilité exacte pour *toutes* les orbites périodiques le gabarit trouvé doit être rejeté.

## 5 – RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Dès le début des manipulations, nous avons observé que les comportements dynamiques du laser était différent de ceux observés précédemment par MM Derozier et Bielawski. Il fut constaté une disparition de certains régimes et une apparition de nouveaux comportements. Plus précisément le laser n'oscillait plus spontanément. Bien que nous n'étudions pas le comportement autonome du laser, ceci est significatif d'une modification du système. Nous n'avons également jamais réussi à obtenir la cascade de doublements de périodes complète. Le comportement le plus proche de la cascade sous-harmonique était la séquence T, 2T, 4T puis une crise avec un 2T. Pour contre nous avons systématiquement observé des régimes quasipériodiques. Nous avons des scénarios du type T, 2T puis de la quasipériodicité souvent proche d'un accrochage à 6T ( parfois 12T), puis un régime de période 6T ensuite du chaos et une crise avec un 2T. Il faut signaler que nous avons pas pu mettre en évidence de bistabilité optique (i.e. hystérésis).

Ce changement de comportement dynamique du système était probablement dû :

- au vieillissement du liquide adaptateur d'indice.
- à des poussières qui se seraient déposées sur les miroirs.
- à la diode de pompe dont la puissance de sortie baissait.

C'est pourquoi après avoir enregistré quelques résultats nous avons nettoyé les miroirs et changé de système optique et de liquide adaptateur d'indice.

Ce comportement à dominante quasipériodique du laser était remarquablement stable. Nous devons souvent rétablir le couplage entre la fibre optique et la diode de pompe. Rappelons que le cœur de la fibre fait  $5.8 \mu\text{m}$  de diamètre donc les variations de températures de la pièce suffisaient pour détériorer le couplage entre la diode de pompe et le laser. Malgré

ces nouveaux réglages le même comportement dynamique était toujours observé. De plus une modification importante de la position de la fibre n'entraînait pas de changement de comportement dynamique.

L'observation des sections de Poincaré et des diagrammes de premier retour du signal suggérait que le laser à fibre suivait une route vers le chaos différente de celle du fer à cheval de Smale, c'est à dire que le gabarit de l'attracteur devait avoir plus de deux branches. Les seuls gabarits observés expérimentalement à ce jour sont des gabarits à deux branches que ce soit dans des systèmes physiques comme le laser CO<sub>2</sub> à absorbant saturable [15], ou des réactions chimiques comme la réaction de Belousov-Zhabotinskii [16,17].

Le premier groupe d'enregistrements a été fait dans une phase chaotique issue d'un comportement quasipériodique proche d'un accrochage à 6T et précédant une crise avec un cycle de période 2T. L'analyse du signal, l'extraction des orbites périodiques instables montrèrent que le signal était trop bruyant et qu'il contenait trop peu d'orbites périodiques. Le signal recueilli était difficilement exploitable car le comportement dynamique du système s'inscrit essentiellement sur une évolution périodique de période 2T. En effet, comme on peut le constater sur la figure 5, la dynamique du système peut se résumer en "un grand pic et un petit pic". Ceci rendait l'analyse du signal difficile. Nous avons quand même pu extraire suffisamment d'orbites périodiques : une orbite de période T (1) et trois orbites de période 2T (2a), (2b) et (2c) (fig 26). La figure 27 donne le signal temporel d'une orbite de période 2T extraite du signal chaotique étudié. Nous avons pu déterminer les nombres d'enlacement des différentes orbites entre elles :

- Nombre d'enlacement de l'orbite
- (1) avec l'orbite (2a) :  $lk = +1$
- (1) avec l'orbite (2b) :  $lk = +2$
- (1) avec l'orbite (2c) :  $lk = +1$
- (2a) avec l'orbite (2b) :  $lk = +3$
- (2a) avec l'orbite (2c) :  $lk = +3$
- (2b) avec l'orbite (2c) :  $lk = +4$

Des orbites voisines de l'orbite de période T effectuent un tour complet autour complet autour de cette dernière, donc la torsion de l'orbite (1) est de +2 (en unité de  $\pi$ ). Enfin des différentes intersections des orbites entre elles nous avons déduit les taux de rotations relatifs :

<i>orbite</i>	1	2a	2b	2c
1	0			
2a	1/2	0, 1/2		
2b	1	1, 1/2	0, 1/2	
2c	1/2	1, 1/2	1	0, 1/2

Comme nous avons trois orbites de période 2T le gabarit de l'attracteur devait avoir plus de deux branches. Mais nous avons trop peu d'orbites pour le déterminer exactement. Car dans l'hypothèse d'un gabarit à trois branches, la torsion de l'orbite de période T et les taux de rotations relatifs nous donnaient six gabarits possibles.

La détermination du gabarit était rendue d'autant plus difficile que nous n'avions pas accès à la dynamique symbolique du système, qui permet de déterminer quelles sont les orbites qui passent par une même branche du gabarit. En effet l'absence de structure des sections de Poincaré (fig 28) ne nous permet pas d'associer de dynamique symbolique aux orbites périodiques extraites de l'attracteur. De plus lorsque l'on variait la phase de la section de Poincaré nous constatons difficilement l'étirement et le repliement de l'attracteur.

Nous avons calculé la dimension de l'attracteur car pour appliquer la théorie des nœuds il faut que celui-ci soit de dimension inférieure ou égale à 3. La dimension d'un attracteur étrange est donnée par sa dimension fractale, c'est à dire la façon dont il occupe l'espace. Une borne inférieure de cette dimension est donnée par la dimension de corrélation, c'est à dire la loi de puissance qui relie le nombre de point se trouvant en moyenne dans une boule de rayon  $r$  centrée sur un point de l'attracteur en fonction du rayon de cette boule  $C(r) \propto r^\nu$  [1]. Le calcul de la dimension de corrélation de l'attracteur (fig 29) converge vers un nombre supérieur à 3, donc la dimension fractale est supérieure à 3. Ceci condamne toute étude de cet attracteur étrange du laser à fibre par la théorie des nœuds puisque en dimension supérieure à 3 tous les nœuds sont homéomorphes au nœud trivial (fig 15).

Une deuxième série d'expérience fut effectuée en ajoutant un amplificateur logarithmique (§ 4.1) afin d'enlever l'indétermination sur la zone d'intensité faible donnant un signal plus facilement exploitable. Mais le bruit était toujours trop important puisque le rapport signal sur bruit était de l'ordre de 30 dB. Nous avons observé un autre attracteur qui semblait pouvoir être plongé dans  $\mathbb{R}^3$  puisque la dimension de corrélation convergait vers une limite inférieure à 3. Mais nous n'avons pas pu extraire suffisamment d'orbites périodiques pour déterminer les nombres d'enlacement des orbites entre elles et leur torsion.

Le système optique fut donc nettoyé et on a changé le liquide adaptateur d'indice en vue d'obtenir un comportement chaotique plus simple. Nous avons eu des problèmes de retour entre la diode laser et le miroir  $M_1$  (fig 1) qui provoquaient un comportement chaotique de la diode de pompe elle-même. Il suffit d'un retour de l'ordre du millième de la puissance incidente pour engendrer du chaos dans la diode laser. Ce retour peut être dû à des réflexions parasites sur l'extrémité de la fibre optique qui perd sa planéité en frottant contre le miroir et où apparaissent des micro-fissures lorsque l'on tord la fibre. Le chaos de la diode de pompe a été éliminé en modifiant l'alignement du miroir d'entrée avec la diode et en coupant et repolissant l'extrémité de la fibre.

## 6 – CONCLUSION

Le laser à fibre dopée a montré un comportement dynamique très riche puisque plusieurs routes vers le chaos ont pu être observées. On peut espérer observer sur dans tel système un attracteur étrange qui n'ait pas la topologie du fer à cheval de Smale.

Nous avons observé une route vers le chaos comprenant des régimes quasipériodiques et des régimes de période  $6T$ . L'utilisation des méthodes de stabilisation des états stationnaires instables [6] pourraient être employées pour comprendre comment certains régimes périodiques, tels que les régimes de période  $6T$  observés se sont formés puisqu'on peut ainsi stabiliser un état stationnaire instable jusqu'à la bifurcation qui le fait apparaître. Pour avoir un plus grand nombre d'orbites périodiques instables il faudrait avoir des fichiers plus longs contenant plus de périodes de modulation. Lorsque le chaos est complètement développé toutes les orbites périodiques autorisées par la structure du gabarit sont présentes dans l'attracteur. Il faudrait donc mesurer l'exposant de Lyapunov, qui permet de mesurer le degré de développement du comportement chaotique de l'attracteur. Surtout il faudrait obtenir une évolution dynamique du système plus simple, pour avoir un attracteur de dimension fractale inférieure à 3, avec des phases chaotiques présentant une structure interne, ce qui permettrait d'associer une dynamique symbolique à l'attracteur et observer l'étirement et le repliement du l'attracteur lorsque l'on fait varier la position du plan de section de Poincaré.

## Références :

- [1] P. Bergé, Y. Pomeau, Ch. Vidal, *l'ordre dans le chaos* (Herman, Paris, 1988)
- [2] N. B. Tuffilaro, T. Abbott, S. Reilly, *An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos* (Addison Wesley, 1992)
- [3] D. Dangoisse, P. Glorieux, D. Hennequin, Phys. Rev. **A36**, 4775 (1987)
- [4] D. Derozier, S. Bielawski and P. Glorieux, Phys. Rev. **A46**, XXX (1992)
- [5] E. Ott, C. Grebogi and J.A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **64**, 1196 (1990)
- [6] S. Bielawski, D. Derozier and P. Glorieux, submitted to Phys. Rev. **A**
- [7] K. Otsuka, P. Mandel, S. Bielawski D. Derozier and P. Glorieux, Phys. Rev. **A46**, 1692 (1992)
- [8] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (Paris, 1892)
- [9] F. Takens, *Lectures notes in mathematics* **898** (1981)
- [10] P. Holmes, Physica D**21**, 7 (1986)
- [11] G.B. Mindlin, Xin-Jun Hou, H.G. Solari, R. Gilmore and N.B. Tuffilaro, Phys. Rev. Lett. **64**,2350 (1990)
- [12] N.B. Tuffilaro, H.G. Solari and R. Gilmore, Phys. Rev. **A41**, 5717 (1990)
- [13] L.H. Kauffman *On knots* Princeton university press (Princeton, New Jersey, 1987)
- [14] P.J. Holmes and P.F. Williams, Archives of Rational Mechanics Annals **90**, 115 (1985)
- [15] F. Papoff, A. Fioretti, E. Arimondo, G.B. Mindlin, H. Solari and R. Gilmore, Phys. Rev. Lett. **68**, 1128 (1992)
- [16] G.B. Minlin, H.G. Solari, M.A. Natiello, R. Gilmore and X.J. Hou, J nonlinear Sci. **1**, 147 (1991)
- [17] M. Lefranc and P. Glorieux, *Topological analysis of chaotic signals from a CO<sub>2</sub> laser with modulated losses* , submitted to International Journal of Bifurcation and Chaos.

fig 1 - Montage du laser à fibre pompé par une diode laser.

Légende du schéma : LD : diode laser, MO : objectifs de microscope (NG 10), DM : miroir dichroïque ( $R_{max}$  à 1080 nm,  $T_{max}$  à 820 nm), CM : miroir de couplage  $M_1$  ( $R > 99.5\%$  à 1080 nm,  $T_{max}$  à 820 nm), DF : fibre dopée au Nd, OC : miroir de couplage  $M_2$  ( $R \approx 95\%$ ), L : lentille, HWP : lame demi-onde (1080 nm), PC : cube polariseur, F : filtre passe bande (1060-1100 nm), BS : séparateur de faisceau, M : monochromateur, PD : diode au silicium.

fig 2 - Diagramme des niveaux d'énergie de  $Nd^{3+}$

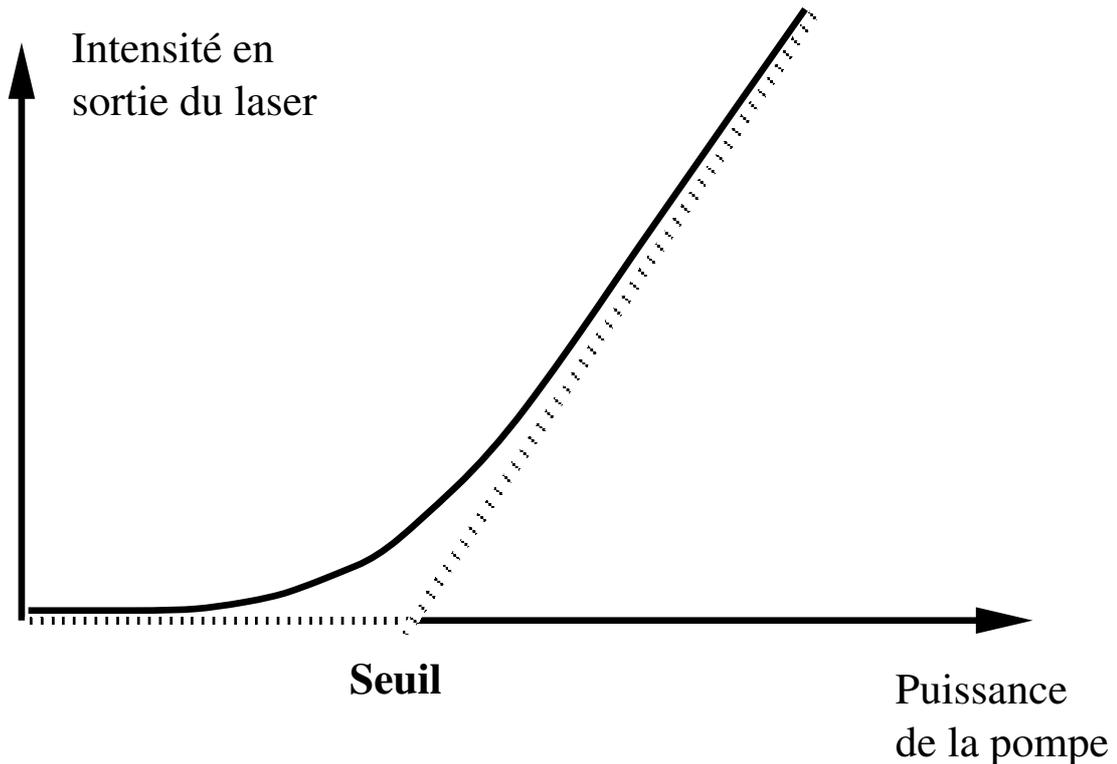


fig 3 - La mise en marche du laser est une bifurcation imparfaite (trait plein). Si on ne tient pas compte de l'émission spontanée dans les équations du laser la mise en marche (seuil) est une bifurcation imparfaite (trait pointillé).

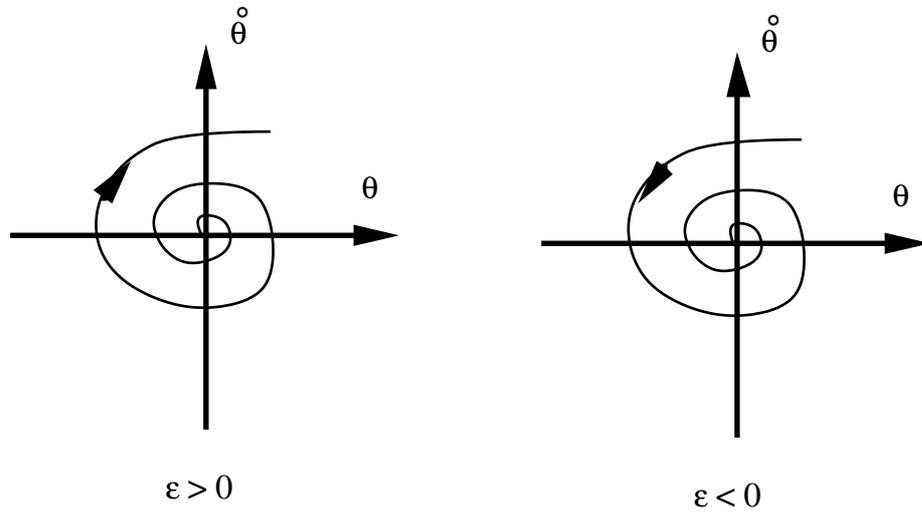
fig 4 - Caractéristique du laser. Entre les deux seuils  $P_{th1}$  et  $P_{th2}$  l'émission est polarisée rectilignement. Au dessus du deuxième seuil il émet suivant deux directions de polarisation linéaires orthogonales.

fig 5 - Mise en évidence expérimentale de la réponse en antiphase du OFL pour différent régimes de modulation de la pompe. Les deux séries de courbe sont reliées à l'intensité de chaque polarisation,  $I_1$  pour la trace supérieure et  $I_2$  pour la trace inférieure. Courbes (a) réponse de période T, (b) période 2T, (c) période 4T, (d) régime chaotique.

fig 6 - Représentation dans l'espace des phases défini par  $(\theta, u = \dot{\theta})$  des trajectoires d'un pendule pesant de longueur l et de masse m. Les cercles concentriques les plus proches du centre

correspondent à l'approximation  $\sin \theta \approx \theta$ .

**a :**



**b :**

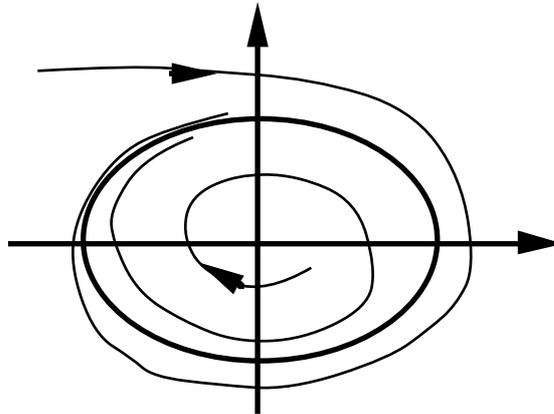


fig 7 - (a) La solution stationnaire  $(0,0)$  est stable pour  $\epsilon < 0$ , instable pour  $\epsilon > 0$ .

(b) Lorsque  $\epsilon$  devient positif le point fixe  $(0,0)$  est instable mais les trajectoires convergent vers un cycle limite.

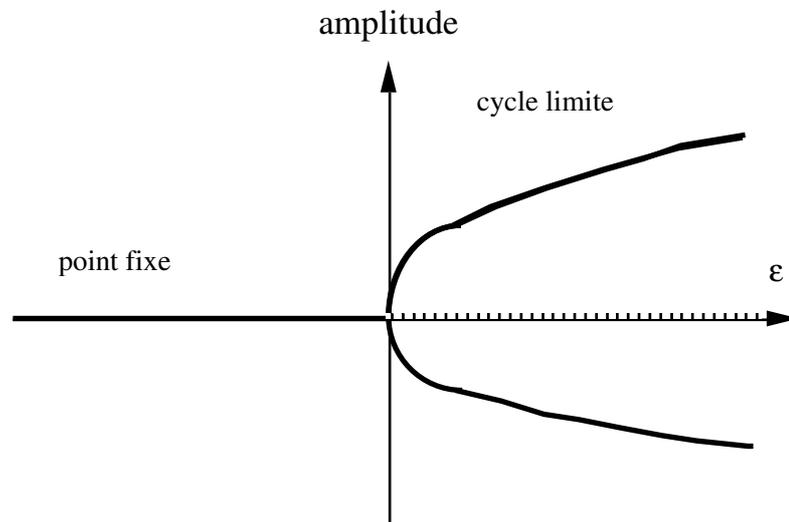


fig 8 - Diagramme de bifurcation de l'oscillateur paramétrique. Pour  $\epsilon < 0$  il y a un point fixe stable (0,0), pour  $\epsilon > 0$  nous avons un cycle limite stable.

fig 9 - Illustration de la sensibilité aux conditions initiales (SCI). Lorsqu'elles s'inscrivent sur un attracteur étrange, deux trajectoires de phases voisines s'écartent toujours l'une de l'autre et ceci quelle que soit leur proximité initiale.

fig 10 - Principe de la section de Poincaré. La trajectoire  $\Gamma$  coupe le plan  $S$  en des points successifs  $P_0, P_1, P_2, \dots$ . Ces points appartiennent à la section de Poincaré de  $\Gamma$  par le plan  $S$ . Les intersections prises en compte sont celles qui correspondent à un même sens d'orientation de l'intersection la trajectoire avec le plan. Sur la figure on considère que les intersections pour lesquelles la courbe  $\Gamma$  traverse le plan de haut en bas.

fig 11 - Pour connaître la stabilité d'une solution périodique (cycle limite), on regarde l'évolution, au bout d'une période, d'un faible écart  $\delta \mathbf{x}$ . Suivant que cet écart diminue suivant toutes les directions ou, au contraire, s'accroît dans au moins une direction, on conclut à la stabilité ou à l'instabilité du cycle.

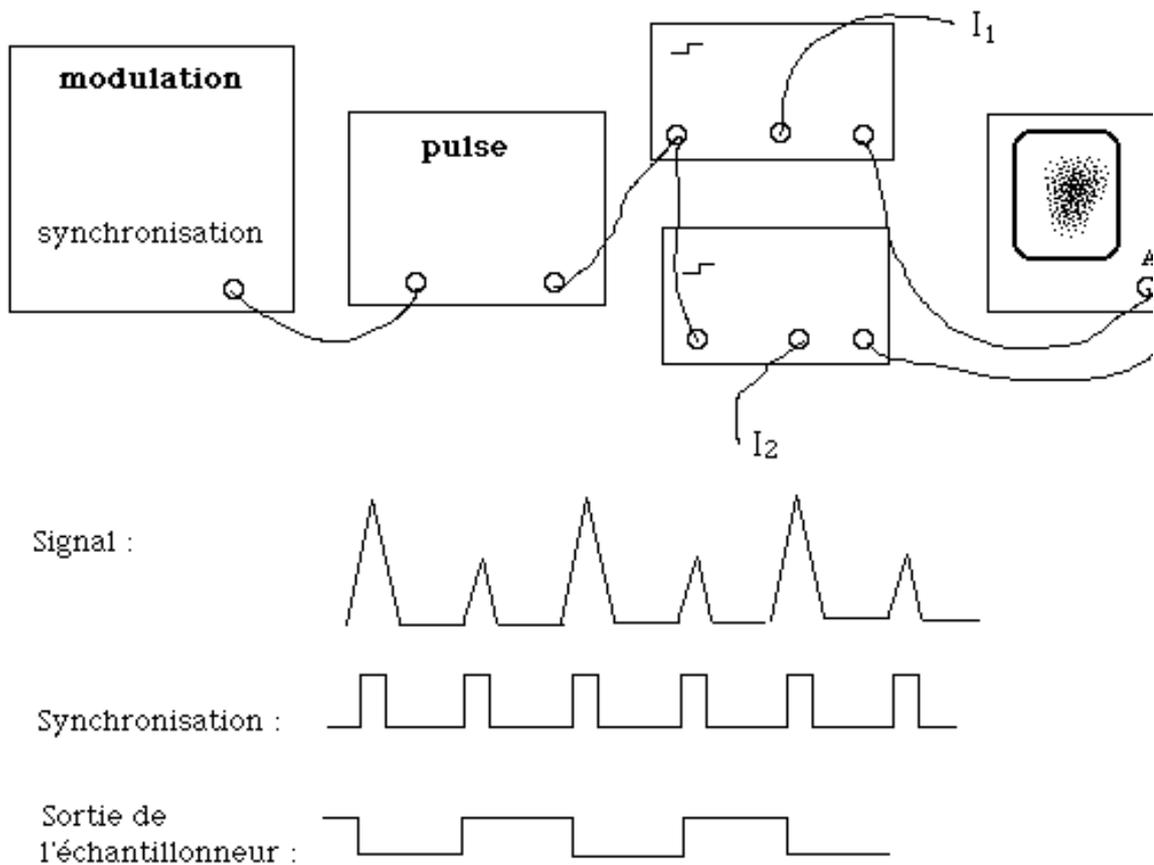


fig 12 - Réalisation d'une section de Poincaré. Chaque échantillonneur est synchronisé par le signal de modulation (par exemple une impulsion lorsque le signal passe par un maximum) avec un retard réglable. Ils sont tous les deux déclenchés sur le front montant de la synchronisation.

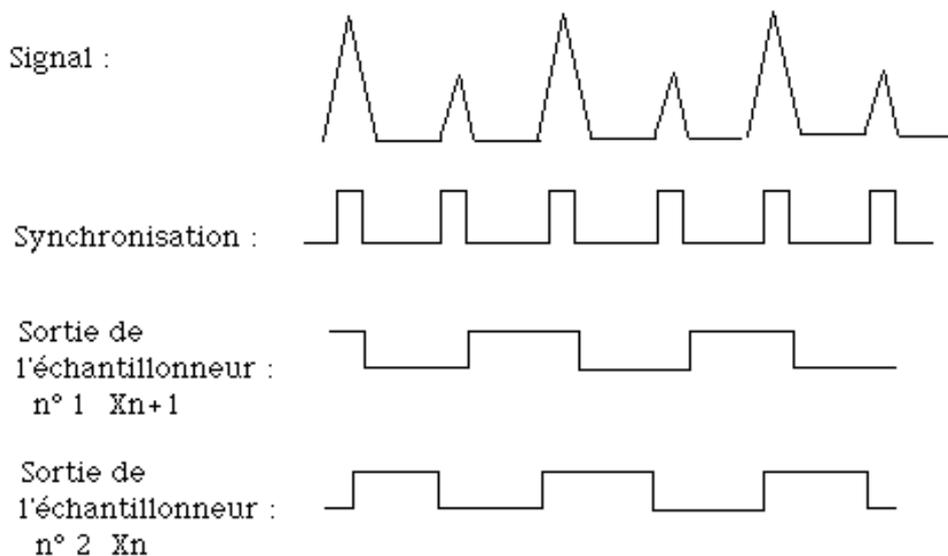
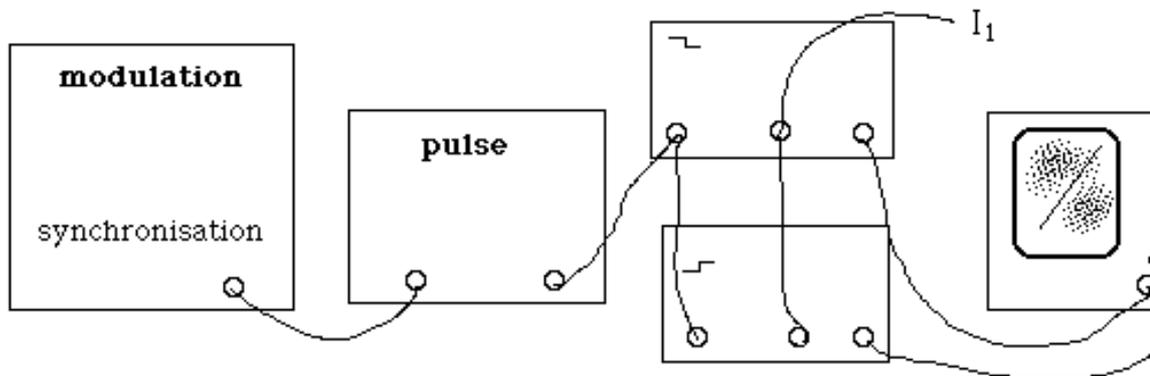


fig 13 - Réalisation d'un diagramme de 1er retour. Les deux échantillonneurs sont montés en série, ils sont synchronisés par le même signal. Le premier est déclenché sur le front descendant il donne  $X_{n+1}$ , le second sur le front montant il donne  $X_n$ .

fig 14 - Diagramme de bifurcation visualisé sur un oscilloscope lorsqu'on fait varier la fréquence de modulation. Quand la fréquence diminue, on observe la cascade sous harmonique  $T, 2T, 4T, 8T$  puis chaos. On observe ensuite une crise avec une orbite  $2T$ .

fig 15 - Représentation plane de quelques noeuds : (a) le noeud trivial ou unknot, (b) le noeud en huit, (c) le noeud de trèfle orienté à gauche, (d) orienté à droite, (e) le noeud carré, (f) le noeud de ménagère.

fig 16 - Exemples de liens : (a) le lien de Hopf, (b) les anneaux de Borromean, (c) le lien de Whitehead.

fig 17 - Les mouvements de Reidemester : (a) Type I le détortillage (untwist), (b) type II séparation de deux brins, (c) type III déplacement du brin médian.

fig 18 - Conventions des signes des croisements : (a) positif et (b) négatif.

fig 19 - Exemples de calcul des nombres d'enlacement : les liens (1) et (3) ont un nombre d'entrelacement non nul, les cordes ne sont donc pas séparables sans être coupées. Le lien (2) est équivalent, par un mouvement de Reidemeister de type II, à deux anneaux séparés.

fig 20 - Taux de rotations relatifs entre une orbite de période 2 et une orbite de période 3. La rotation du vecteur  $\Delta r$  entre les deux orbites est calculée sur la surface de la section de Poincaré. Ce vecteur est suivi pendant  $3 * 2 = 6$  périodes. Le nombre de rotations de celui-ci donne les taux de rotations relatifs entre les deux orbites.

fig 21 - Représentation sous forme de tresse des deux orbites de la figure 20. On calcule le taux de rotations relatif en attribuant un signe à chaque croisement entre l'orbite A et l'orbite B. Chaque croisement ajoute ou retranche un demi-tour.

fig 22 - (a) Représentation de l'évolution d'un rectangle dans le cas du fer à cheval de Smale. L'évolution du flot s'effectue de bas en haut. Le rectangle blanc S

(b) Les branches du gabarit sont délimitées par les variétés stables et instables de l'attracteur.

fig 23 - Projection d'intervalles sur la variété instable  $W^u(O)$ . L'évolution du flot est orientée vers le bas.

(a) La branche de gauche a une torsion nulle et celle de droite de +1.

(b) La branche de gauche a une torsion de +2 et celle de droite de +3.

fig 24 - Construction du gabarit : (a) on identifie les extrémités des deux branches en  $\Sigma_{W^u(O)}^T$ , i.e. on contracte selon la direction stable et (b) on identifie  $\Sigma^0$  et  $\Sigma^T$  pour obtenir un gabarit de tresse (braid template).

fig 25 - Représentation de quelques orbites périodiques du fer à cheval : deux orbites de période 1 : O et 1, et une de période 2 : 01.

fig 26 - Représentation de l'orbite de période T et d'orbites de période 2T extraites du signal chaotique. Les courbes sont représentées modulo T et il faut identifier les extrémités des segments. Donc une orbite de période T est représentée par une seule courbe et une orbite de période 2T par deux courbes.

Sur la figure (a) l'orbite de période T ne coupe que deux fois l'orbite de période 2T, ces deux orbites ont donc un nombre d'enlacement de +1. Sur la figure (b) l'orbite de période T coupe quatre fois l'orbite de période 2T, les orbites ont donc un nombre d'enlacement de +2.

fig 27 - Signal temporel d'une orbite de période 2T extraite d'un signal chaotique. Les lignes verticales correspondent à une durée de T.

fig 28 - Section de Poincaré du signal chaotique. L'absence de structure interne ne permet pas définir de dynamique symbolique pour notre attracteur. Les points numérotés 1 et 2 donnent la position dans l'attracteur de l'orbite 2a de période 2T.

fig 29 - Calcul de la dimension de corrélation de l'attracteur chaotique.

Les courbes tracées représentent la dimension de corrélation en fonction du logarithme,  $\ln(r)$ ,

de la distance sur laquelle est calculée la corrélation. Les différentes courbes correspondent à des reconstructions de l'attracteur dans des espaces des phases  $X(t)$ ,  $X(t + \tau)$ ,  $X(t + 2\tau)$ , ..., de dimension allant de 1 à 20. Il est visible que la dimension de corrélation converge vers une valeur supérieure à 3. La forte variation des courbes pour les petites valeurs de  $\ln(r)$  est due au bruit.