Géométrie quantique:
vers de nouveaux horizons mathématiques

Pierre Vanhove

Mathématiques et autres sciences
24 avril 2014, Université de Lille I

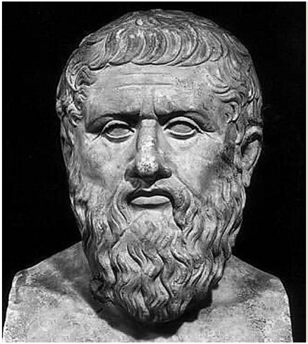
Physique et Mathématique : deux approches

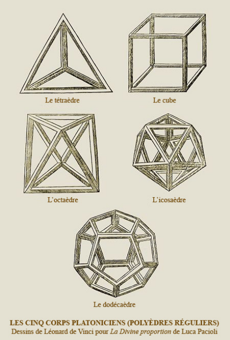
Physique : expériences : étude des propriétés fondamentales du monde réel en particulier ses changements et ses mouvements

Aristote (-384, -322)

Physique et Mathématique : deux approches

Mathématique : abstraction extrème sans contact réel nécessaire avec la nature

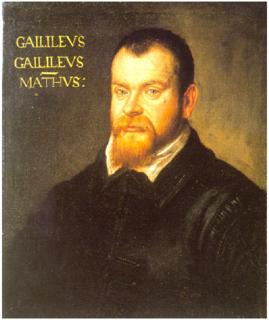




Platon (-427, -347)

La mathématique : un langage naturel

Galilée développe le raisonnement scientifique moderne, basé sur l'imbrication entre les expériences et les analyses mathématiques



Galilée (1564-1642)

La philosophie est écrite dans ce grand livre qui se tient constamment ouvert devant nos yeux, je veux dire l'univers. (...) Cette philosophie, elle est écrite en langue mathématique.

La mathématique : un langage naturel

Henri Poincaré (1854-1912) était un grand physicien mathématicien

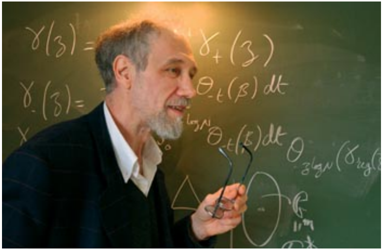
> *Toutes les lois (de la nature) sont donc tirées de l'expérience; mais pour les énoncer il faut une langue spéciale; le langage ordinaire est trop pauvre, il est d'ailleurs trop vague pour exprimer des rapports si délicats, si riches, si précis. (...)*

La mathématique : un langage naturel

Henri Poincaré (1854-1912) était un grand physicien mathématicien

> *Qui nous a appris à connaître les analogies véritables, profondes, celles que les yeux ne voient pas et que la raison devine? C'est l'esprit mathématique, qui dédaigne la matière pour ne s'attacher qu'à la forme pure.*

La mathématique : un langage naturel

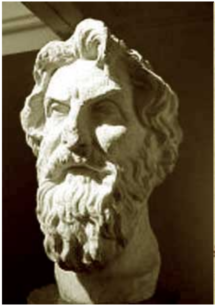
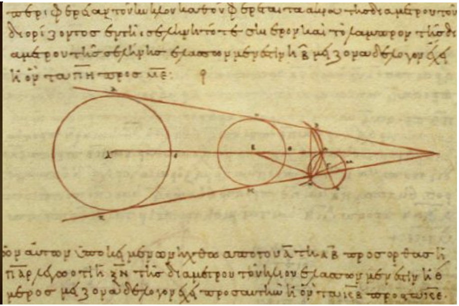


Alain Connes

Je suis prêt à parier qu'on s'apercevra un jour que la réalité matérielle se situe en fait à l'intérieur de la réalité mathématique. (...)

Je crois qu'un des critères d'une vraie compréhension du monde physique extérieur, c'est notre capacité de comprendre sa position à l'intérieur du monde mathématique.

La Physique : une mathématique appliquée?

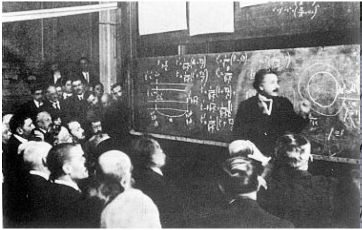



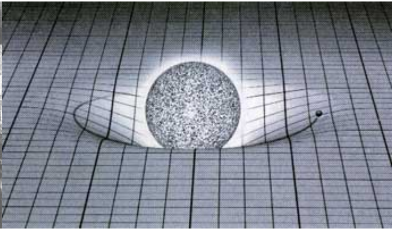
Aristarque de Samos (310–230 av. J.C.) utilisa le théorème de Thalès pour estimer le rayon du Soleil et sa distance à la Terre

Son calcul donna un Soleil beaucoup plus gros que la Terre.

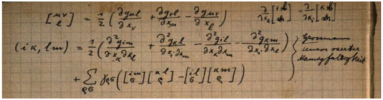
Il conclut logiquement que la Terre tourne autour du Soleil.

La Physique : une mathématique appliquée?



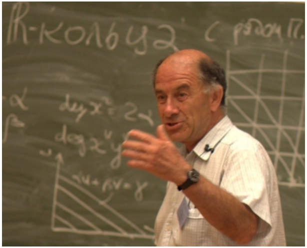


La loi de la gravitation universelle d'Einstein est basée sur la géométrie différentielle des espaces de Riemann déjà existante



En lui donnant une importance physique Einstein a fournit une impulsion dramatique à ce domaine des mathématiques

La Physique : une mathématique appliquée?

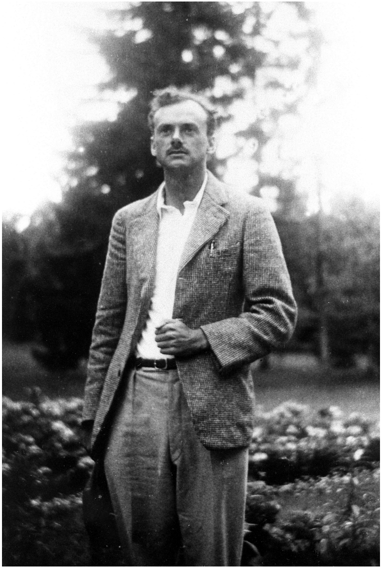


Pour Vladimir Arnol’d (1937-2010) les mathématiques font partie de la physique.

La physique est une science expérimentale, une des sciences naturelles

Les mathématiques sont la partie de la physique où les expériences ne coûtent pas cher

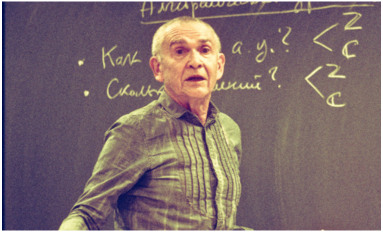
La mécanique quantique



Les progrès continus de la physique demandent pour leur formulation théorique des notions mathématiques de plus en plus avancées. Ce qui n'était attendu par les scientifiques (...) fût la forme particulière des progrès mathématiques nécessaires pour cela (...)

(Dirac 1931)

La mécanique quantique



Les idées les plus profondes de la théorie des nombres présentent une ressemblance frappante avec celles de la physique théorique moderne.

Comme la mécanique quantique, la théorie des nombres fournit des modèles de relation entre le discret et le continu qui ne sont pas du tout évidents, et met en valeur le rôle des symétries cachées.

(Yuri Manin, *Mathematics as Metaphor*, 2007)

En mécanique classique

- ☺ Les grandeurs observées sont des nombres réels
- ☺ déterminisme
- ☺ positions et vitesse sont les seules données nécessaires

La mécanique quantique

En mécanique quantique

- ☹ Les grandeurs observées ne sont pas des nombres mais des fonctions complexes
- ☹ fondamentalement probabiliste : on ne peut pas déterminer un résultat avec certitude
- ☹ Incertitude d'Heisenberg : positions et vitesse ne peuvent pas être connues simultanément

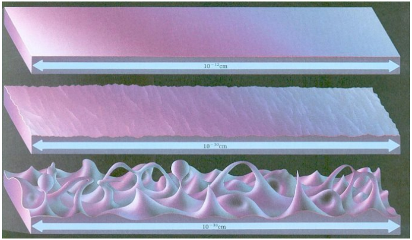
$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \hbar = 6.6.26\, 10^{-34}\, kg\, m^2/s$$

Plus on connait la position avec précision : moins on connait sa vitesse et vise-versa

Quantification

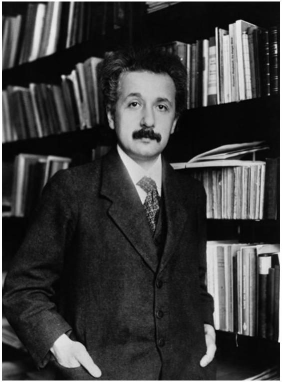
Selon la valeur de $\hbar$ le monde est

$\hbar = 0$ classique



$\hbar \gg 1$ quantique

Quelle mathématique pour la mécanique quantique?

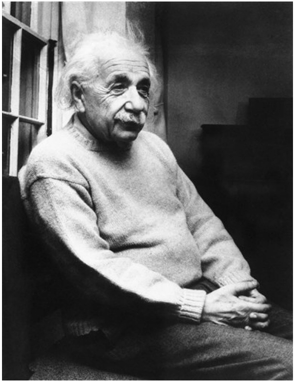


Einstein en 1916

Comment formuler des énoncés relatifs au discontinu sans avoir recours recours à un continuum – l'espace-temps –; ce dernier devrait être exclus de la théorie, en tant qu'il est une construction adventice que ne justifie pas l'essence du problème et qui ne correspond à rien de réel.

A cet égard nous manquons cruellement de formalisme mathématique adéquat.

Quelle mathématique pour la mécanique quantique?



Einstein en 1954

(année de sa mort)

Il me semble en tout cas que l'alternative continu-discontinu est une authentique alternative; cela veut dire qu'ici il n'y a pas de compromis possible.

Dans cette théorie, il n'y a pas de place pour l'espace et le temps, mais uniquement pour des nombres, des constructions numériques et des règles pour les former sur la base de règles algébriques excluant le processus limite.

Quant à savoir quelle voie sera la bonne, seule la qualité du résultat nous l'apprendra.

Quelle mathématique pour la mécanique quantique?

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \hbar = 6.6.26\,10^{-34}\,kg\,m^2/s$$

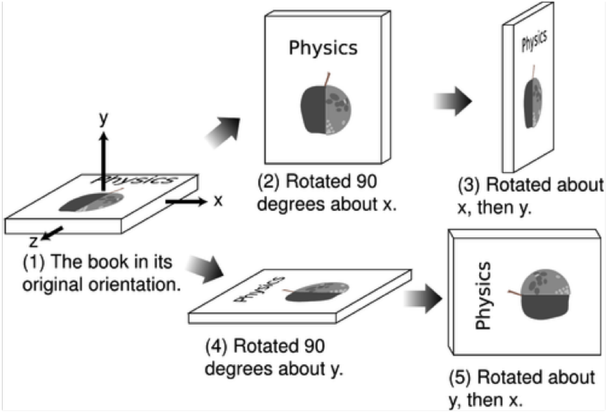
La relation d'incertitude rend toute description géométrique caduque

Coordonnées X, Y, Z et impulsion P_X, P_Y, P_Z sont des opérateurs

Les fonctions $F(X, P)$ de X et P satisfont une algèbre non-commutative

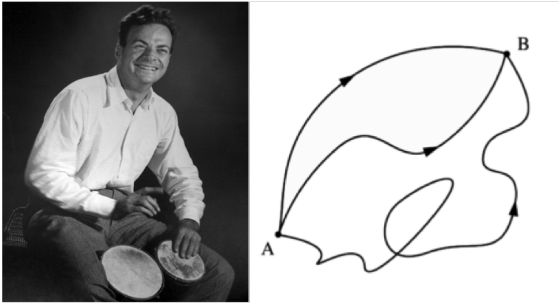
Quelle mathématique pour la mécanique quantique?

Une algèbre non-commutative est donnée par les rotations



Intégrale de chemin

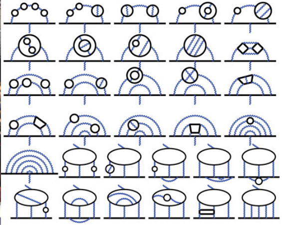
Feynman dit que la physique classique contient suffisamment d'information pour savoir comment la quantifier



Son raisonnement utilise l'intégrale de chemin associant un poids $\exp(iS/\hbar)$ à chaque trajectoire classique

Intégrale de chemin : succès

Ce raisonnement très physique satisfait la communauté des physiciens

Permet un accord avec l'expérience à une précision inégalée

$$\begin{aligned} g_{\rm exp} &= 2.00231930436\cdots &\quad \text{expérience}\\ g_{\rm th} &= 2.00231930435\cdots &\quad \text{théorie}\end{aligned}$$

Intégrale de chemin : scepticisme


Jean Dieudonné

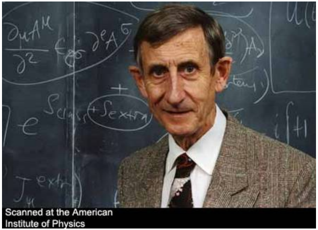
Mais c'est lorsqu'on aborde les théories mathématiques qui sont à la base de la mécanique quantique que l'attitude de certains physiciens dans le maniement de ces théories confine véritablement au délire. (...)

On se demande ce qui peut rester dans l'esprit d'un étudiant lorsqu'il a absorbé cette invraisemblable accumulation de non-sens, une véritable "bouillie pour les chats" !

Ce serait à croire que les physiciens d'aujourd'hui ne sont à l'aise que dans le flou, l'obscur et le contradictoire.

Intégrale de chemin : scepticisme

Devant de telles critiques de nombreux physiciens ont baissé les bras

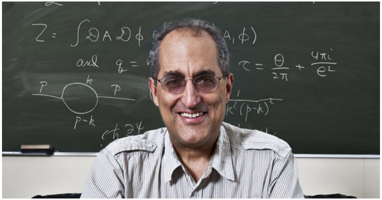


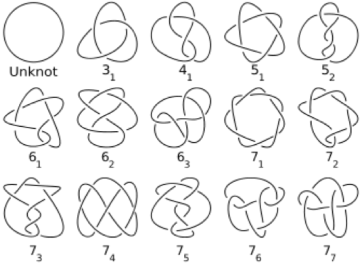
I am acutely aware of the fact that the marriage between mathematics and physics, which was so enormously fruitful in past centuries, has recently ended in divorce

(Freeman Dyson, in a 1972 lecture)

Intégrale de chemin : renaissance

En 1989 Edward Witten utilise l'intégrale de chemin pour définir des invariants de noeuds





Cette approche a suggéré une large classe d'invariant topologique pour des variétés de dimension 3 et des invariants de noeuds dans ces variétés (Médaille Fields 1990)

Intégrale de chemin : renaissance

Maxim Kontsevich a utilisé l'intégrale de chemin pour obtenir des résultats mathématiques nouveaux sur la déformation de structures classiques en une géométrie quantique

Quantification par déformation

On veut construire une algèbre quantique non-commutative $\mathcal{A}$ déformation d'une algèbre classique A telle que

$$\lim_{\hbar\to 0} \mathcal{A} = A$$

Considérons une algèbre de polynômes ou fonctions infiniment différentiables

$$\mathcal{A} := \{f(X,P), [X,P] = XP - PX = i\hbar\}$$

Si $\hbar = 0$ c'est commutatif comme dans la théorie classique

En théorie quantique $\hbar \neq 0$ et $[X,P] \neq 0$ c'est non-commutatif

Quantification : crochet de Poisson

Quelles quantités cessent de commuter après quantification?

L'information est contenue dans le crochet de Poisson

$$\{f,g\} := \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial g}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial g}{\partial X} \qquad \{X,X\} = 0, \qquad \{P,P\} = 0, \qquad \{X,P\} = 1$$

Quantification : crochet de Poisson

Quelles quantités cessent de commuter après quantification?

L'information est contenue dans le crochet de Poisson

$$\{f,g\} := \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial g}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial g}{\partial X} \qquad \{X,X\} = 0, \qquad \{P,P\} = 0, \qquad \{X,P\} = 1$$

Avec la substitution

$$\{\cdot,\cdot\} \to \frac{1}{i\hbar}[\cdot,\cdot] \qquad [X,X] = 0, \qquad [P,P] = 0, \qquad [X,P] = i\hbar$$

Quantification : crochet de Poisson

Quelles quantités cessent de commuter après quantification?

L'information est contenue dans le crochet de Poisson

$$\{f,g\} := \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial g}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial g}{\partial X} \qquad \{X,X\}=0, \qquad \{P,P\}=0, \qquad \{X,P\}=1$$

Avec la substitution

$$\{\cdot,\cdot\} \to \frac{1}{i\hbar}[\cdot,\cdot] \qquad [X,X]=0, \qquad [P,P]=0, \qquad [X,P]=i\hbar$$

Le crochet de Poisson permet de "déformer" l'algèbre des observables classiques en une algèbre non-commutative

Quantification : crochet de Poisson

X et P sont des coordonnées de l'espace des configurations. Il y a beaucoup de choix locaux mais pas choix globaux.

Définition opératorielle

$$f, g \mapsto \{f, g\}$$

Le crochet de Poisson engendre les équations du mouvement

$$\frac{df(X,P)}{dt} = \{H(X,P), f(X,P)\}$$

$H(X,P)$ l'énergie (Hamiltonien) du système

Quantification : crochet de Poisson

Le crochet de Poisson doit satisfaire

- ✓ Linéarité : $\{f+g,h\} \to \{f,h\}+\{g,h\}$
- ✓ antisymétrie : $\{f,g\} = -\{g,f\}$
- ✓ Règle de Leibniz : $\{f\cdot g,h\} = f\,\{g,h\}+g\,\{f,h\}$
- ✓ Identité de Jacobi : $\{\{f,g\},h\}+\{\{h,f\},g\}+\{\{g,f\},h\} = 0$

Quantification par déformation

Les questions fondamentales de la quantification par déformation

- Peut-on maintenant définir un espace des phases avec un crochet de Poisson et le quantifier?
- Peut-on trouver une algèbre non-commutative mais associative telle que

$$f \star g = f \cdot g + \frac{i\hbar}{2}\{f, g\} + \text{termes d'ordre supérieurs en } \hbar^2$$

L'idée est de remplacer une algèbre commutative de fonction par une algèbre non-commutative et la traiter comme un espace non-commutatif

Quantification par déformation

Certains espaces ressemblent à des espaces plats pour lesquels on peut définir un système de coordonnées il était connu qu'une déformation de quantification existe

Mais dans le cas général où le crochet de Poisson peut-être dégénéré il n'était pas évident qu'une quantification puisse être réalisée

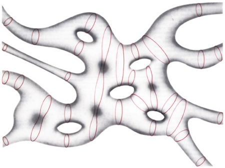
Quantification par déformation

En 1997 à la surprise de tous, Kontsevich a prouvé que toutes les variétés de Poisson peuvent être quantifiées (Médaille Fields 1998)

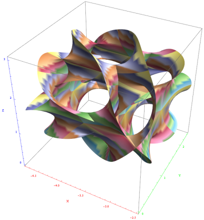
Pour cela il a utilisé l'intégrale de Feynman mais il a du considérer la généralisation donnée par la théorie des cordes

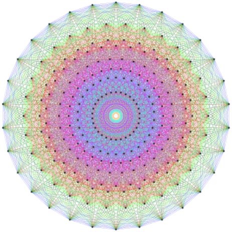
Théorie des cordes

La théorie des cordes remplace les particules par des vibrations de cordes de très petites tailles



L'intégrale de chemin code maintenant le comportement quantique de l'espace-temps





Théorie des cordes

Comments on the impact of Dynkin's work on current research in representation theory

David A. Vogan, Jr.
Department of Mathematics,
Massachusetts Institute of Technology

A central problem in the representations of reductive Lie groups is constructing unitary representations attached to the nilpotent coadjoint orbits.

In a related direction, Arthur's conjectures (still unproved) relate homomorphisms of $SL(2)$ to residues of Eisenstein series. Colette Moeglin has done great work in the direction of proving that the residues predicted by Arthur (with Dynkin's tables) actually exist. The residues give rise to interesting unitary automorphic representations that are difficult to construct in any other way. Her first paper on this subject is "Orbites unipotentes

Avec mes collaborateurs nous avons construit une fonction répondant à la fois a un problème physique et une question mathématique de théorie des représentations irrésolue

Conclusion

adapted from Terras

Wigner parlait de la *“déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature”*

Conclusion

adapted from Terras

On peut parler de *la déraisonnable efficacité de la physique quantique dans les mathématiques*

1. La théorie des représentations (Wigner, Bargman, Harish-Chandra, . . .)
2. Programme de Langlands (représentation automorphe)
3. Symétrie miroir et géométrie algébrique . . .