L'effet Hall Quantifié

Frank Ferrari & Pierre Vanhove
Juin 1992

Averstissement : Ce rapport avait été rédigé sur avec Word sur un Machintosh. Une erreur de jeunesse. La transposition en un fichier TEXn'a pas été complète et à donné ce document à la mise en page désastreuse. Je n'ai pas eu le temps de remettre les accents sur tous les mots. Je prie le lecteur de bien vouloir m'en excuser.

The Hall effect, discovered in 1879 by E. H. Hall, was subject to recent developpements since the discovery of the quantum Hall effect by Von Klitzing in 1980 on a MOSFET Si and its observation in semiconductor heterojunctions. The observation of QHE, quantification of the Hall resitance $R_H = h/ie^2$ where i is an integer, need a two-dimentional electrons gaz. Only an accurate study of the impurities effects, which create localized states, and a pretty argument using the gauge invariance of Electrodynamics developped by Laughlin, can explain the quantification of the Hall resistance R_H. Thus, we can measure with a great accuracy the value of the fine constant a and realize a resistance standart. Finally, we shall speak about the fractional quantum Hall effect, discovered in 1982, where rational values are permitted for i.

I – IL ÉTAIT UNE FOIS ...

En 1879 Edwin Herbert Hall [1] pensa que lorsque l'on applique un champ magnétique a un conducteur parcouru par un courant celui-ci agit sur le courant et non sur le conducteur comme l'écrivit Maxwell dans son Traite sur l'électricité et le magnétisme. Le courant doit alors être confine sur un bord de l'échantillon et la résistance électrique du conducteur croître, c'est la magnéto-résistance positive. Cet effet étant très faible Hall n'observa rien. Puis il pensa a mesurer la tension orthogonalement au courant. Sa valeur non nulle confirma l'intuition de Hall. C'est l'effet Hall classique (fig 1).

$$\rho_{yx} = \frac{F}{j_x} \tag{1}$$

où F est le champ électrique suivant y et j_x la densité de courant suivant x. La force de Lorentz compensant la force électrique, $NeF = j_x B$, ou N est le nombre d'électrons par unité de volume et e la charge de l'électron. La résistance Hall classique est donc :

$$R_H = \frac{B}{Nd|e|} = \frac{B}{n|e|}, \tag{2}$$

n étant le nombre d'électrons par unité de surface.

fig 1 - (a) Dans l'effet Hall le champ magnétique est applique perpendiculairement a l'échantillon suivant la direction z, on fait passer un courant suivant x et la tension Hall est mesurée suivant y. (b) Cette forme de l'échantillon permet de séparer les mesures des résistances longitudinales R_x et de Hall R_H. On mesure la tension de Hall entre les points 1 et 3 et la tension longitudinale entre 1 et 2, le champ magnétique étant applique orthogonalement a la figure.

Mais en 1926 a Leiden Shubnikov remarqua d'étranges oscillations de la résistance longitudinale pour des cristaux de haute pureté de Bismuth a de basse températures. C'est l'effet Shubnikov-de Haas [2] (fig 2-b). Ensuite toutes les expériences r'éalisées confirmèrent celle de Hall.

Il fallut attendre les expériences de Von Klitzing [3] en 1980 sur des MOSFET Si, ce qui lui valut le prix Nobel en 1984, et celles de Tsui et Gossard en 1981 [4] sur des hétérostructures GaAs-$\mathrm{Al_xGa_{1-x}As}$

pour observer un nouveau phénomène. Ils montrèrent que la loi donnant la résistance de Hall en fonction du champ magnétique n'est pas toujours linéaire mais présente des paliers quantifies (fig 2-a) selon :

$$R_H = \frac{h}{ie^2}, \text{ où } i \text{ estunentier.} \tag{3}$$

fig 2 - L'effet Hall quantifie dans une hétérojonction $In_xGa_{1-x}As$-InP a differentes températures.
(a) La résistance de Hall présente des paliers pour les valeurs h/ie^2 avec i entier. Les paliers s'élargissent lorsque la température diminue.
(b) La magnétorésistance R_{xx} oscille en fonction de H_z. Elle présente des plateaux ou elle est quasiment nulle a chaque fois que R_H/g est constante.

Cette découverte ouvrit de nouveaux horizons de recherche aussi bien pour les théoriciens puisqu'il fallait expliquer ces plateaux, que pour les expérimentateurs car on comprit immédiatement que cette découverte permettrait de calculer precisement la constante de structure fine [3] et de définir un nouvel étalon de résistance. Von Klitzing, Tsui et Gossard comprirent immédiatement que l'effet Hall quantifie ne peut se manifester qu'en présence d'un gaz bidimensionnel d'électrons. Nous allons donc expliquer comment on réalise un tel gaz et pourquoi son existence permet une quantification de la résistance de Hall.

II – L'ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

Deux types de matériaux ont été utilises pour réaliser ce gaz : le MOSFET Si (un transistor a effet de champ compose d'un métal d'un oxyde, dans notre cas ce sera SiO_2 et d'un semi-conducteur Si) ou une hétérostructure, juxtaposition de deux semi-conducteurs, typiquement GaAs-$Al_xGa_{1-x}As$, déposés en couches selon le procèdé MBE (épitaxie par jet moléculaire). Le MOSFET (fig 3) contient une grille conductrice en aluminium contre SiO_2. Cette grille est polarisée de façon a créer un puits quantique triangulaire délimité par un potentiel infini du côte du diélectrique et un gradient de potentiel électrique du côte du semi-conducteur.

fig 3 - Sur ce schéma d'un MOSFET sont représentes le pont en aluminium, l'isolant SiO_2, le silicium dope p, ainsi que les contacts du drain et de la source.

Dans le cas ou Si est dope p les électrons remplissent d'abord toutes les lacunes de la bande de valence du semi-conducteur. Si le champ électrique est suffisamment important la bande de conduction de Si passera en dessous du niveau de Fermi et ainsi les électrons, par l'intermédiaire de la grille, transiteront vers les niveaux d'énergie de la bande de conduction situes sous le niveau de Fermi. Il est a noter que l'énergie du bas de la bande de conduction est maintenant inférieure a celle du haut de la bande de valence en situation normale (fig 4).

fig 4 - Niveaux d'énergie d'un MOSFET pour une tension de grille positive. Lorsque la bande de *conduction de Si passe en dessous du niveau de Fermi un gaz bidimensionnel se forme a l'interface de SiO_2.*

Dans le cas d'un dopage de type n il suffit d'inverser le signe de la tension de grille et c'est alors la bande de valence qui délimite le puits quantique. Stern et Howard [5] ont montre que l'extension spatiale d'un tel gaz est de l'ordre de 10 Åa partir du diélectrique et que le mouvement perpendiculaire a la grille est quantifie. Si le système est soumis a une perturbation ΔE inférieure a l'écart entre deux niveaux d'énergie, typiquement $\Delta E << 10$ mev, le gaz est purement bidimensionnel et a basse température les degrés de liberté orthogonaux a la grille sont annules.

Dans les hétérostructures GaAs-$\mathrm{Al_xGa_{1-x}As}$ ou $\mathrm{Ga_{0.47}In_{0.53}As}$-InP le principe de la méthode réside dans la juxtaposition de deux semi-conducteurs de gap et de dopage très différents (fig 5).

fig 5 - L'hétérojonction est compose de AlAs dope n, donc son niveau de Fermi est proche de sa bande de conduction (a gauche du schéma), et de GaAs de gap plus faible.

D'un côte on trouve GaAs qui est naturellement faiblement dope p, de l'autre AlGaAs de gap beaucoup plus important que GaAs et artificiellement dope n ; ainsi des électrons mobiles se trouvent dans sa bande de conduction. L'équilibre thermodynamique de l'échantilllon impose l'uniformité du niveau de Fermi (fig 6). Les trous de la bande de valence de GaAs et les électrons de la bande de conduction de $\mathrm{Al_xGa_{1-x}As}$ créent un champ électrique $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_z$. Apparaî t alors un puits quantique dans lequel les électrons de la bande de conduction de $\mathrm{Al_xGa_{1-x}As}$ tombent ; les bandes sont alors courbées. Remarquons que la bande de conduction de GaAs passe sous le niveau de Fermi ; ainsi les électrons peuvent être pièges dans le puits délimite par cette bande.

fig 6 - Niveaux d'énergie de l'hétérostructure GaAs-AlGaAs. Les électrons des ions donneurs traversent la barrière par effet tunnel et vont se loger dans les niveaux d'énergie du puits situes sous le niveau de Fermi. L'épaisseur du gaz 2D est de l'ordre de 100 Å.

Étudions plus precisement comment se répartissent les électrons dans ce puits de potentiel. En première approximation celui-ci a une forme triangulaire donnée par :

$$U(z) = qFz \text{ pour } z \geq 0 \tag{4a}$$

$$U(z) = +\infty \text{ pour } z < 0 \tag{4b}$$

En fait, pour l'hétérostructure, $U(z) = \Delta E_{cond}$ pour $z < 0$. Comme ΔE_{cond} est beaucoup plus grand que les écarts entre les niveaux d'énergie dans le puits, on peut bien poser $\Delta E_{cond} = +\infty$. L'hamiltonien du système se décompose en H(x,y,z)=H(x,y)+H(z) avec :

$$H(x,y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} \text{ et } H(z) = \frac{p_z^2}{2m} + U(z) \tag{5}$$

où m est la masse effective de l'électron.
Les fonctions d'onde s'écrivent donc :

$$Y(x,y,z) = Ae^{ik_x x}e^{ik_y y}\phi(z) \tag{6}$$

A étant une constante de normalisation.
Ainsi en posant :

$$E = E' + \frac{\hbar^2(k_x^2 + k_y^2)}{2m} \tag{7}$$

ϕ verifie pour $z \geq 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi'' + qFz\phi = E'\phi \tag{8}$$

En effectuant le changement de variable :

$$\zeta(z) = -(z - \frac{E'}{qF})\left[\frac{2mqF}{\hbar^2}\right]^{3/2} \tag{9}$$

on se ramène a l'équation différentielle :

$$\phi\text{"} + \zeta\phi = 0 \tag{10}$$

qui admet pour solution la fonction d'Airy :

$$\phi(z) = \int_0^\infty \cos(\frac{u^2}{3} + \zeta(z)u)du \tag{11}$$

La condition $\phi(z=0) = 0$ entraî ne la quantification des niveaux d'énergie car $E'\left[\frac{2m}{\hbar^2 q^2 F^2}\right]^{3/2}$ doit être un zéro de j ce qui donne :

$$E'_n = \left(\frac{3}{2}\pi(n + \frac{3}{2})\right)^{2/3}\left[\frac{\hbar^2 q^2 F^2}{2m}\right]^{3/2} \tag{12}$$

La densité d'état du système vaut :

$$\rho(E) = \frac{m}{\pi\hbar^2}\sum_n Y(E - E_n) \tag{13}$$

Y étant la fonction de Heavyside.

On remplit les niveaux d'énergie compris entre le niveau fondamental E_0 et le niveau de Fermi. Pour les valeurs courantes de la densité d'électrons n_s varie de 4.2 10^{11} électrons par cm^2 a 9 10^{11} électrons par cm^2 pour GaAs-$Al_{0.3}Ga_{0.7}As$ a 4.2 K [4] donc seul le niveau fondamental E_0 est rempli (fig 7-a), le gaz est alors purement bidimensionnel.

Le calcul précédant permet de déduire un ordre de grandeur de l'extension transversale du gaz, celle-ci étant donnée par la distance entre deux zéros consécutifs de j :

$$\Delta z = \left[\frac{\hbar^2}{2mq^2F^2}\right]^{3/2} \left[\left(\frac{21\pi}{8}\right)^{2/3} - \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3}\right] \simeq 100 \text{ Å} \tag{14}$$

fig 7 - a) Densité d'états d'un gaz 2D d'électrons en absence de champ magnétique. b) Densité d'états d'un gaz 2D d'électrons en présence d'un champ magnétique.

Bien qu'historiquement l'effet Hall quantique fût t découvert sur un MOSFET [3], expérimentalement on préfère utiliser les hétérostructures a dopage module. Pour le MOSFET la tension appliquée a la grille permet de contrôler facilement la densité d'électrons accumules au niveau de l'interface entre diélectrique et le semi-conducteur. Mais la supériorité de l'hétérostructure se présente en deux points : Tout d'abord les électrons de GaAs ont une masse effective plus petite que ceux de Si ($m = 0.05m_0$ pour GaAs contre $m = 0.2m_0$ pour Si) donc pour un temps de relaxation τ donne leur mobilité est plus élevée conformément a $m = q\tau/m$

Enfin le bon accord entre les mailles de GaAs et $Al_xGa_{1-x}As$, la valeur commune de leur constante diélectrique et l'absence de charge sur la surface de séparation permettent d'avoir des mobilités de l'ordre de 10^5 a 10^6 cm^2/Vs contre 10^4 cm^2/Vs pour le MOSFET Si.

III – UNE EXPLICATION TRÈS SIMPLE !

Nous allons montrer que l'on peut, par un argument très simple, retrouver la valeur des plateaux. Cet argument fut développe par Von Klitzing des la découverte de l'effet Hall quantifie [3]. Sous l'effet du champ magnétique applique, les électrons du gaz bidimensionnel sont dévies et ont tendance a décrire des trajectoires circulaires. Les niveaux d'énergie accessibles sont quantifies et appelés niveaux de Landau [6]. Plus precisement l'hamiltonien du système s'écrit :

$$H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} + eV - \frac{BS_z}{2m} \tag{15}$$

où m et g sont respectivement la masse effective et le facteur de Lande effectif d'un électron dans le gaz bidimensionnel, et $V = Fy$. En se plaçant dans la jauge de Landau :

$$A = -Bye_x \tag{16}$$

on peut mettre les fonctions d'onde sous la forme :

$$\Psi = e^{\frac{i\,px}{\hbar}} f(y)\phi(z) \tag{17}$$

avec $p = p_x$, en ayant pris $p_z = 0$ le gaz étant bidimensionnel, $\phi(z)$ solution du puits quantique triangulaire, et ou f est solution de l'équation d'un oscillateur harmonique centre en y_0 et d'énergie E_n tels que :

$$y_0 = \frac{1}{\omega}\left(\frac{p}{m} - \frac{F}{B}\right) \tag{18}$$

et

$$E_n = (n + \frac{1}{2} + \frac{gm_s}{\omega})\hbar\omega + eFy_0 + \frac{1}{2}\frac{E}{m}^2 \tag{19}$$

avec $\omega = -\frac{eB}{m}$ (pulsation cyclotron, $\omega \geq 0$), m_s projection du spin sur l'axe des z et F le champ électrique suivant y.
La surface occupée par le gaz d'électrons est $S = L_x L_y$ les conditions aux limites périodiques donnent donc

$$\exp\left(i\frac{pL_x}{\hbar}\right) = 1 \tag{20}$$

soit $p = \frac{2\pi\hbar}{L_x}k$, k entier.
Comme $0 \leq y_0 \leq L_y$ on en déduit $0 \leq k \leq \frac{-eBS}{2\pi\hbar}$ en écrivant $y_0 \simeq \frac{p}{\omega m}$ et finalement le nombre d'électrons par unité de surface et par niveau de Landau :

$$n_s = \frac{qB}{h} \quad (q = -e) \tag{21}$$

Ce résultat peut s'interpreter comme suit : les électrons ont une trajectoire circulaire dont la surface s est telle qu'un quantum de flux magnétique F_0 la traverse :

$$\Phi_0 = \frac{h}{e} = Bs \quad , \quad \frac{1}{n_s} = s \tag{22}$$

Pour un niveau de Fermi donne, un nombre entier i de niveaux de Landau sont remplis (fig 7-b). Le nombre d'électrons par unité de surface est donc $n = in_s$. Halperin a montre que l'expression classique de la résistance Hall s'applique [7], et on obtient donc la formule (3).

Lorsque le champ magnétique B varie, le niveau de Fermi traverse les niveaux de Landau donc la résistance de Hall passe d'un palier a l'autre et la résistance longitudinale s'annule (fig 2). Mais n est fixe donc la valeur de R_H/g calculée, qui correspond aux moments ou le niveau de Fermi est entre deux niveaux de landau, ne devrait être atteinte que pour des valeurs ponctuelles du champ magnétique. Cette explication simpliste ne rend donc pas compte de l'existence des plateaux. Aussi faut-il faire appel a des théories plus élaborées...

IV – UN PEU DE THEORIE...

Nous allons montrer que les impuretés contenues dans les échantillons jouent un rôle fondamental et sont seules susceptibles d'expliquer l'existence de plateaux.

Un moyen de les prendre en compte est de considérer le libre parcours moyen l_0 des électrons ou le temps moyen entre deux chocs t_0. Pour un système sans impuretés, $t_0 = \infty$, en présence de champ magnétique les niveaux d'énergie sont des niveaux de Landau. Classiquement les électrons parcourent des orbites circulaires dans le plan orthogonal au champ magnétique. S'il y a peu d'impuretés, c'est a dire qu'elles sont distantes d'au moins le rayon classique de l'orbite des électrons, seule une partie des électrons sera perturbée par leur présence. Prange a montre [8] que la présence des impuretés levé partiellement la dégénérescence des niveaux de Landau ; ceux-ci se trouvent élargis, ils prennent la forme d'une lorentzienne(fig 8). Aux bords des niveaux se trouvent des etats localises et au centre des etats étendus.

fig 8 - Les impuretés élargissent les niveaux de Landau, au centre des niveaux se situent les etats étendus (extended states) et sur les bord les etats localises (localized states). La présence des etats localises entre les etats étendus permet d'expliquer la présence des plateaux de la résistance de Hall R_H/g.

Le phénomène de localisation des électrons par les impuretés a été introduit pour la première fois par Anderson [9], et est étudié en détail dans [10]. Comme les etats localises ne peuvent pas conduire de courant, celui-ci ne dépend pas de la façon dont ils sont remplis. Le fait que seule une partie des électrons participe a la conduction tendrait a faire penser que la résistance de Hall fut plus importante que h/ie^2, valeur calculée en supposant que tous les électrons conduisent le courant. En fait le courant transporte reste le mê me que si tous les etats étaient étendus car les électrons qui passent au voisinage d'une impureté voient leur vitesse augmenter, donc transportent un excès de courant qui compense exactement le manque dû aux etats localises. Les etats étendus étant sépares par des etats localises, lorsque le champ magnétique diminue ces derniers sont progressivement remplis sans remplir de nouveaux etats étendus donc la résistance de Hall ne change pas, nous avons alors un palier. La transition entre deux paliers se produit lorsque le niveau de Fermi arrive dans de nouveaux etats étendus, car a ce moment la résistance de Hall augmente brusquement. Ainsi les etats localises permettent au niveau de Fermi de rester suffisamment longtemps entre deux niveaux de Landau pour pouvoir observer des paliers. Pour dépasser l'approche heuristique précédente, et étudier avec rigueur l'effet des impuretés dans certains cas particuliers, il faut faire appel a des méthodes élaborées de calcul numérique (cas des potentiels gaussiens distribues de manière aléatoires, ou des sommes de fonctions δ : Aoki [11] [12], Ando [13] [14]), ou utiliser de puissants arguments théoriques de la Theorie des Champs (Wegner [15], Brezin [16]).

Ainsi la valeur des plateaux semble immuable, independante des echantillons et du taux d'impurete dans ceux-ci, et est directement reliee a des constantes fondamentales de la Physique (3). Un tel resultat amene a penser que l'effet est dû en realite a un principe fondamental. C'est ce que montra Laughlin en 1981 [17] ; nous allons reprendre ici ses arguments. Nous prenons un echantillon de geometrie un peu particuliere : au lieu du ruban plat habituel, nous aurons une boucle bidimentionnelle (fig 9). D'autres geometries sont possibles (voir par exemple les travaux d'Halperin [18]), mais on peut penser a priori qu'elles sont toutes equivalentes. Ce point peut être discute en detail par des considerations de Topologie [19]. Notre ruban bidimensionnel forme une boucle de longueur L, et un champ magnetique B le traverse orthogonalement en chacun de ses points (fig 9).

fig 9 - Schema de la boucle. A droite sont indiquees les conventions utilisees dans la suite de l'expose.

Le champ magnetique total est :

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_\rho + B_y\mathbf{e}_y \tag{23}$$

avec

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 = \frac{B}{\rho} + \frac{dB_y}{dy} \tag{24}$$

Sur le ruban :

$$B_y(y) \simeq -\frac{B}{R}y_r \tag{25}$$

y_r etant la coordonnee selon y du ruban et R le rayon de la boucle.
Le flux du champ magnetique a travers le ruban est :

$$\Phi = \pi R^2 B_y \tag{26}$$

Supposons que B varie de dB, B_y varie de dB_y d'apres (25) et Φ varie de $d\Phi$. Le travail qu'un operateur imaginaire doit fournir pour contrecarrer la force electromotrice induite $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ est :

$$dW_{rev} = Id\Phi \tag{27}$$

I etant le courant parcourant le ruban.
De $dU = TdS + dW_{rev}$ (U energie du systeme) on deduit :

$$I = \left(\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right)_S \tag{28}$$

Un potentiel vecteur possible est $\mathbf{A} = A(y)\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_x$ etant le vecteur unitaire orthoradial. On a alors $A(y) = -By$ (jauge de Landau).
En notant $A = A(y_0)$, on a $\Phi = AL$. Finalement :

$$I = \frac{1}{L}\frac{\partial U}{\partial A} \tag{29}$$

Imaginons que l'on applique le champ $\mathbf{B}$ et donc le potentiel vecteur A. L'hamiltonien du systeme, qui etait : $\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V$, V potentiel electrique, devient :

$$H = \frac{(\mathbf{P} - q\mathbf{grad}f)^2}{2m} + V \tag{30}$$

avec $f = Ax$, x etant la longueur le long du ruban. Ceci a pour effet de multiplier les fonctions d'onde par le facteur de phase $\exp(iqxA/\hbar)$.
Si tous les etats etaient localises, ceci n'aurait aucune influence sur l'energie et l'intensite serait nulle. Mais comme il existe des etats etendus la coherence de phase entre les fonctions d'onde entraîne :

$$\exp\left(\frac{iqLA}{\hbar}\right) = 1 \tag{31}$$

(equivalent des conditions aux limites periodiques pour un ruban plat), soit :

$$A = \frac{h}{qL}k \quad (k \text{ entier}) \tag{32}$$

Ainsi y_0 est change en $y_0 - \frac{A}{B}$ (voir (18)) et d'apres la formule (19) de l'energie, celle-ci depend lineairement de A. Nous pouvons donc ecrire d'apres (28) :

$$I = \frac{\Delta U}{\Delta \Phi} \tag{33}$$

Nous supposons ici que l'on applique un champ magnetique tel que $\Delta\Phi$ ait sa valeur minimale obtenue en faisant $k = 1$ dans (32), c'est a dire :

$$\Delta\Phi = \frac{h}{q} = \Phi_0 \quad (\text{quantumdefluxmagnetique}) \tag{34}$$

L'invariance de jauge implique que la repartition des electrons soit identique avant et apres le passage du quantum de flux Φ_0. Donc, n etant le nombre d'electrons par unite de surface, i electrons auront ete transferes d'un côte a l'autre du ruban (fig 10) :

$$i = nL\Delta y_0 = \frac{nh}{qB} \tag{35}$$

i est exactement le nombre de niveaux de Landau sous le niveau de Fermi (voir 21).

fig 10 - Les electrons situes sur le bord superieur du ruban se retrouvent sur le bord inferieur apres passage du quantum de flux Φ_0.

Ce transfert correspond a une difference d'energie due au potentiel electrique :

$$\Delta U = iqV \tag{36}$$

Donc (33) donne $I = \frac{q^2 i}{h}V$, et on deduit $R_H/g = \frac{h}{iq^2}$.

Nous voyons donc que l'effet Hall quantique est lie a la nature etendue des etats pres du centre des niveaux de Landau elargis par les impuretes, et que les effets de bord n'influent pas sur la precision de la quantification.

V – L'INFLUENCE DE LA TEMPERATURE

Dans l'etude precedente nous n'avons pas discute de l'influence de la temperature, supposant en fait que tout se passait comme si les echantillons etaient maintenus au zero absolu. Ainsi, lorsque le niveau de Fermi est situe dans une region d'etats localises, nous avions considere que la conductivite longitudinale etait nulle : $\sigma_{xx} = 0$.

Mais pour $T > 0$ il existe un processus de conductivite par sauts d'un etat localise a un autre assiste par les phonons. Ono a etablit [20] sous l'hypothese des niveaux de Landau de forme gaussienne avec des etats localises dans leurs ailes que la loi $\sigma_{xx}(T)$ est donnee par :

$$\sigma_{xx} = K \frac{e^{-\sqrt{\frac{T_0}{T}}}}{T} \tag{37}$$

avec $T_0 = \frac{qBh}{2m} V_c$, V_c etant la constante de percolation qui est proche de l'unite. (K est une constante de proportionnalite).

Cette relation est tres bien verifiee experimentalement, par exemple dans les heterojonctions $\mathrm{In_xGa_{1-x}As}$-InP en faisant des mesures entre 50 mK et 1 K [21].

Elle permet entre autres d'obtenir la masse effective m des electrons dans l'echantillon.

Lorsque T diminue, on observe des sauts entre plateaux de plus en plus raides, et les plateaux augmentent de largeur. La largeur maximale est obtenue pour des sauts parfaitement abrupts. Quant aux pics de ρ_{xx} ils sont de plus en plus etroits.

Finalement on peut en deduire que le nombre d'etats localises augmente quand la temperature diminue. Par exemple dans les heterojonctions $\mathrm{In_xGa_{1-x}As}$-InP, le plateau pour lequel $R_H/g = h/4e^2$ atteint 80% de sa valeur maximale possible a 50 mK pour tendre vers 100% a T=0 K. Donc 80% des etats electroniques sont localises a T=50 mK et ainsi une faible proportion d'etats au centre des niveaux de Landau correspond a des etats etendus.

VI – LES APPLICATIONS A LA METROLOGIE

La remarquable constance de R_H/g sur chacun des plateaux permet de mesurer avec une grande precision la constante de structure fine grâce a la relation :

$$R_H(i) = \frac{\mu_0 c}{2i\alpha} \quad , \quad (\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}) \tag{38}$$

Cette utilisation de l'effet Hall quantique, proposee des la decouverte de l'effet par Von Klitzing, a ete developpee dans de nombreux laboratoires. Mesuree avec une precision de l'ordre de 3 parties par million (ppm) dans les travaux originaux [3] $\alpha^{-1} = 137,0353 \pm 0,0004$ les techniques experimentales modernes permettent d'obtenir une precision de l'ordre de 0,3 ppm.

Cependant, si l'on veut que l'effet Hall quantique permette de tester l'Electrodynamique quantique, il faudra encore ameliorer, d'un facteur cent environ, l'incertitude sur les mesures. En effet, des experiences sur le moment magnetique anormal de l'electron permettent d'obtenir une valeur de α a 0,1 ppm pres [22], et les calculs theoriques les plus precis, effectues par Kinoshita [23] donnent :

$$\alpha^{-1} = 137,035993(10) \pm 0,07 \text{ ppm} \tag{39}$$

Il faudrait donc reduire l'incertitude sur R_H/g sous 0,05 ppm pour que l'effet Hall quantique soit veritablement utile pour mesurer α, ce que l'on espere pouvoir faire dans les prochaines annees.

Mais l'interê t de l'effet Hall quantique en metrologie n s'arrê te pas la. Supposant connu α, il permet en effet de construire des etalons de resistance de haute precision. Les methodes utilisees, fondees sur des mesures potentiometriques [24] (fig 11-b) ou sur l'utilisation de ponts de Wheatstone modifies [25] (fig 11-a) permettent d'obtenir une precision de l'ordre de 0,01 ppm.

fig 11 - Deux schemas simplifies des montages utilises pour mesurer avec precision la resistance de Hall. Le circuit (a) est base sur une methode potentiometrique et le (b) utilise un pont de Wheatstone modifie. Le pont de Wheatstone permet atteindre des precisions de l'ordre de 0.02 ppm.

VII – DERNIER REBONDISSEMENT ...

Alors que l'on pensait l'effet Hall quantique enfin compris, du moins dans ses grandes lignes, Tsui, Störmer et Gossard observerent en 1982 sur des heterojonctions GaAs-$\mathrm{Al_xGa_{1-x}}$As [26] des plateaux supplementaires correspondant a i=1/3 et i=2/3 !... Aujourd'hui, de nombreux autres plateaux fractionnaires ont ete observes : 4/3, 5/3, 7/3, 8/3, 2/5, 1/5, etc, ce qui correspond a des nombres de la forme p/q, p et q etant des entiers, q impair [26] (fig 12) [28] [29]. Les valeurs fractionnaires de ces plateaux sont extrê mement precises [27] [28] ; pour i=1/3 par exemple la precision est de 30 ppm. Remarquons aussi que certaines valeurs fractionnaires n'ont ete obtenues que pour ρ_{xx} (fig 12). Enfin, il faut savoir que les plateaux fractionnaires peuvent ê tre vus, ou ne pas être vus, selon la temperature ou le degre d'impurete de l'echantillon.

fig 12 - Representation des resistivites longitudinales et transversales mesurees a 150 mK. A certains pics de ρ_{xx} ne correspondent aucun plateaux de r_{xy}.

L'effet Hall quantique fractionnaire ressemble tout de mê me beaucoup a l'effet Hall quantique entier. Pour l'expliquer, il faut faire appel a une autre sorte de particules que les electrons, qui tranportent une charge fractionnaire e/j. Ces quasiparticules peuvent être considerees comme etant un nouvel etat de la matiere : un fluide quantique incompressible [30]. A l'aide d'un argument de jauge tout a fait similaire a celui developpe pour l'effet Hall entier, on peut expliquer des plateaux correspondant a $R_H/g = h/ie^2$ pour i=1/m et i=1-1/m. On peut envisager une generalisation de ce modele pour expliquer d'autres plateaux.

VIII – EN CONCLUSION

Rarement en Physique la connexion entre experience et theorie n'aura ete aussi forte que dans l'etude de l'effet Hall quantique. Depuis la decouverte de Von Klitzing en 1980, les theoriciens ont constamment ete mis a l'epreuve de resultats experimentaux deroutants, comme par exemple les plateaux fractionnaires. Ce defi maintes fois renouvele a permis la naissance de theories toujours plus elaborees et profondes, et qui font qu'aujourd'hui l'Effet Hall quantique est assez bien compris. Celui-ci a dorenavant d'importantes applications en metrologie, puisqu'il permet d'obtenir des etalons de resistance de grande qualite. On espere aussi qu'il pourra bientôt permettre une determination d'une precision inegalee de la constante de structure fine. Neanmoins, l'observation recente de plateaux correspondant a des valeurs paires du denominateur demontre que le sujet est loin d'être clos, puisque ceux-ci ne s'expliquent pas a l'aide des theories actuelles. Sans doute l'effet d'Edwin Herbert Hall n'a-t-il pas encore livre tous ses secrets...

References :

[1] E. H. Hall Am. J. Maths. , 2, 287 Philosophical Magazine, 9, 225

[2] L. V. Shubnikov et W. J. De Haas Communications from the physical laboratory of the university of Leiden, 207, 210

[3] K. Von Klitzing, G. Dorda et M Pepper phys. Rev. Lett., 45, 1980, 494

[4] D. C. Tsui et A. C. Gossard Appl. Phys. Lett., 38, 1981, 550

[5] F. Stern et W. E. Howard Phys. Rev., 163, 1967, 816

[6] L. D. Landau et E. Lifschitz, Cours de physique theorique, Mecanique quantique, p 524

[7] B. I. Halperin Helv Phys. Acta, 56, 1983, 75

[8] R. E. Prange Phys. Rev. B 23, 1981, 4802

[9] P. W. Anderson Phys. Rev., 112, 1900, 958

[10] Y. Nagaoka et H. Fukuyama 1982 Anderson localization Springer Series in Solid State Science 39 (Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York Tokyo)

[11] H. Aoki J. Phys. C 10, 1977, 2583

[12] H. Aoki J. Phys. C 11, 1978, 3823

[13] T. Ando J Phys. Soc. Japan 52, 1983,1740

[14] T. Ando J Phys. Soc. Japan 52, 1984,3101

[15] F. Wegner Z Physik B 51, 1983, 279

[16] E. Brezin, D. J. Gross et C. Itzykson Nuclear Physics B 235, 1984, 24

[17] R. B. Laughlin Phys. Rev. B 23, 1981, 5632

[18] B. I. Halperin Phys. Rev. B 25, 1982, 2185

[19] D. J. Thouless in The Quantum Hall Effect, Second Edition, Chapter 4 (Springer-Verlag)

[20] Y. Ono J Phys. Soc. Japan 51, 1982, 237

[21] J. P. Hirtz These de doctorat en physique du solide soutenue a l'Ecole Normale Superieure de Paris en 1985

[22] R. S. J. Van Dyke, P. B. Scwinberg et H. G. Demelt , 1984, Atomic Physic 7 ed.

[23] T. Kinoshita et W. B. Lindquist Phys. Rev. Lett. 47, 1981, 1543

[24] M. E. Cage, R. F. Dzuiba et B. F. Field IEEE Trans. Instrum. Meas. IM-34, 1985, 301

[25] B. F. Field IEEE Trans. Instrum. Meas. IM-34, 1985, 320

[26] D. C. Tsui, H. L. Störmer et A. C. Gossard Phys. Rev. Lett. 48, 1982, 1559

[27] H. L. Störmer, A. M. Chang, D. C. Tsui et J. C. M. Hwang Phys. Rev. Lett. 50, 1983, 1953

[28] A. M. Chang, P. Berglund, D. C. Tsui, H. L. Störmer et J. C. M. Hwang Phys. Rev. Lett. 53, 1984, 997

[29] R. G. Clark, R. J. Nicholas, A. Usher, C. T. Foxon et J. J. Harris 1985 Proceedings of INT Conf on Electronic Properties of two-dimensional Systems VI des mêmes auteurs voir aussi Surface Science 170, 1986, 141

[30] R. B. Laughlin in The Quantum Hall Effect, Second Edition, Chapter 7 (Springer-Verlag)