

SYMÉTRIES DE DUALITÉ ET FORMES AUTOMORPHES EN THÉORIE DES CORDES

Pierre Vanhove

*IPhT
Saclay*

Leçons de mathématiques et d'informatiques d'aujourd'hui
LaBRI, Université de Bordeaux, 9 mars 2017



PLAN DU COURS

- 1 Partie I : Brève présentation de la théorie des cordes
- 2 Partie II : Symétries de dualité
- 3 Partie III : Formes automorphes en théorie des cordes
- 4 Partie IV : Modes de Fourier et trous noirs
- 5 Partie V : Cas modulaire

RÉFÉRENCES [1]

Ce cours est basé sur des travaux faits en collaborations avec

Michael B. Green, Stephen D. Miller et Jorge G. Russo



- ▶ M. B. Green, J. G. Russo, P. Vanhove, “Modular properties of two-loop maximal supergravity and connections with string theory”, [arXiv :0807.0389] JHEP 0807 (2008) 126
- ▶ M. B. Green, J. G. Russo, P. Vanhove, “Automorphic properties of low energy string amplitudes in various dimensions”, [arXiv :1001.2535] Phys.Rev. D81 (2010) 086008
- ▶ M. B. Green, J. G. Russo, P. Vanhove, “String theory dualities and supergravity divergences”, [arXiv :1002.3805] JHEP 1006 (2010) 075
- ▶ M. B. Green, S. D. Miller, J. G. Russo, P. Vanhove, “Eisenstein series for higher-rank groups and string theory amplitudes”, [arXiv :1004.0163] Commun.Num.Theor.Phys. 4 (2010) 551-596
- ▶ M. B. Green, S. D. Miller, P. Vanhove, “Small representations, string instantons, and Fourier modes of Eisenstein series”, [arXiv :1111.2983] J.Number Theor. 146 (2015) 187-309
- ▶ M. B. Green, S. D. Miller, P. Vanhove, “ $SL(2, \mathbb{Z})$ -invariance and D-instanton contributions to the $D^6 R^4$ interaction”, [arXiv :1404.2192] Commun.Num.Theor.Phys. 09 (2015) 307-344

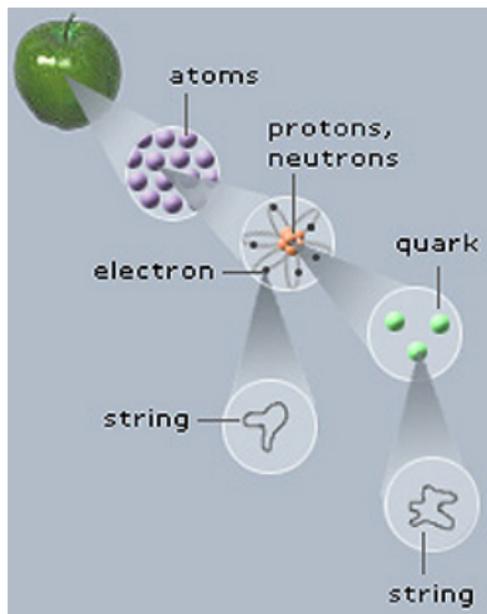
RÉFÉRENCES [2]

- ▶ C. Hull, P. Townsend, “Unity of superstring dualities”, [hep-th/9410167] Nucl.Phys. B438 (1995) 109-137
- ▶ E. Witten, “String theory dynamics in various dimensions”, [hep-th/9503124] Nucl.Phys. B443 (1995) 85-126
- ▶ N. Obers, B. Pioline, “U duality and M theory”, [hep-th/9809039] Phys.Rept. 318 (1999) 113-225
- ▶ M. B. Green, M. Gutperle, P. Vanhove, “One loop in eleven-dimensions”, [hep-th/9706175] Phys.Lett. B409 (1997) 177-184
- ▶ M. B. Green, H. Kwon, P. Vanhove, “M. B. Green, H. Kwon, P. Vanhove”, [hep-th/9910055] Phys.Rev. D61 (2000) 104010
- ▶ M. B. Green, P. Vanhove, “Duality and higher derivative terms in M theory”, [hep-th/0510027] JHEP 0601 (2006) 093
- ▶ D. Kazhdan, B. Pioline, A. Waldron, “Minimal representations, spherical vectors, and exceptional Θ series I”, [hep-th/0107222] Commun.Math.Phys. 226 (2002) 1-40
- ▶ B. Pioline, A. Waldron, “Automorphic forms : A Physicist’s survey”, [hep-th/0312068]
- ▶ B. Pioline, “ R^4 couplings and automorphic unipotent representations”, [arXiv :1001.3647] JHEP 1003 (2010) 116
- ▶ B. Pioline, “ D^6R^4 amplitudes in various dimensions”, [arXiv :1502.03377] JHEP 1504 (2015) 057
- ▶ G. Bossard, A. Kleinschmidt, “Loops in exceptional field theory”, [arXiv :1510.07859] JHEP 1601 (2016) 164
- ▶ G. Bossard, A. Kleinschmidt, “Supergravity divergences, supersymmetry and automorphic forms”, [arXiv :1506.00657] JHEP 1508 (2015) 102
- ▶ G. Bossard, V. Verschinin, “Minimal unitary representations from supersymmetry”, [arXiv :1406.5527] JHEP 1410 (2014) 008
- ▶ G. Bossard, V. Verschinin, “The two D^6R^4 type invariants and their higher order generalisation”, [arXiv :1503.04230] JHEP 1507 (2015) 154
- ▶ G. Bossard, C. Cosnier-Horeau, B. Pioline, “Protected couplings and BPS dyons in half-maximal supersymmetric string vacua”, [arXiv :1608.01660] Phys.Lett. B765 (2017) 377-381
- ▶ G. Bossard, B. Pioline, “Exact ∇^4R^4 couplings and helicity supertraces”, [arXiv :1610.06693] JHEP 1701 (2017) 050
- ▶ G. Bossard, C. Cosnier-Horeau, B. Pioline, “Four-derivative couplings and BPS dyons in heterotic CHL orbifolds”, [arXiv :1702.01926]
- ▶ P. Fleig, H. P. A. Gustafsson, A. Kleinschmidt, D. Persson, “Eisenstein series and automorphic representations” [arXiv :1511.04265]

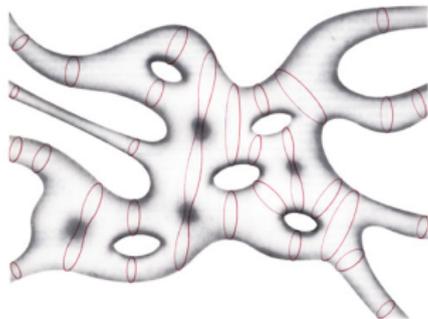
Première partie I

TRÈS BRÈVE PRÉSENTATION DE LA THÉORIE DES CORDES

La théorie des cordes fait l'hypothèse que les particules élémentaires et leur interactions résultent de la nature quantique de *cordes microscopiques fluctuantes*



L'évolution temporelle de la corde engendre une surface Σ dans un espace-temps courbe à 10 dimensions



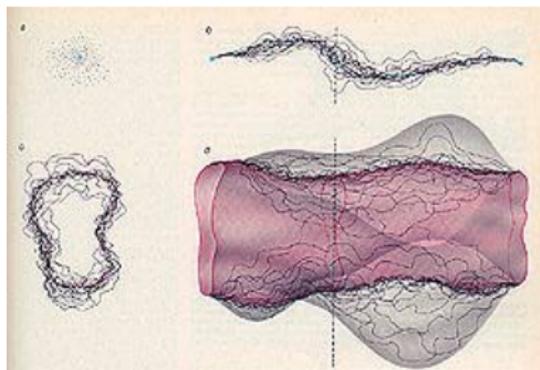
$$\Sigma \rightarrow \mathcal{M}^{1,9}$$
$$(\tau, \sigma) \mapsto X^\mu(\tau, \sigma)$$

La dimension de l'espace est déterminée par

- ▶ **cohérence quantique de la théorie**
- ▶ la contrainte d'un spectre de vibration contenant des particules de spin demi-entiers (les électrons, les quarks, etc) et des particules de spin entier (le photon, etc)

Il y a 5 théories des cordes quantiquement cohérentes

- 1 cordes ouvertes de type I avec groupe de jauge $SO(32)$
- 2 corde fermées dite hétérotique avec groupe de jauge $SO(32)$
- 3 corde fermées dite hétérotique avec groupe de jauge $E_8 \times E_8$
- 4 corde fermée de type IIA
- 5 corde fermée de type IIB



La corde couple à la géométrie de l'espace-temps selon

$$S_{\text{grav}} = -\frac{T_F}{2} \int_{\Sigma} d^2\xi \sqrt{h} \left(h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \mathcal{G}_{\mu\nu}(X) + \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \mathcal{B}_{\mu\nu}(X) \right) + \int_{\Sigma} d^2\xi \Phi(X) \mathcal{R}^{(2)}(h)$$

Une corde ouverte porte des à ses bords

$$S_{\text{jauge}}^{\text{type I}} = \sum_i q_i \oint_{\partial\Sigma} \mathcal{A}_\mu^{(i)}(X) n \cdot \partial X^\mu$$

Ou par une algèbre de courants sur sa surface d'univers

$$S_{\text{jauge}}^{\text{het}} = -\frac{T_F}{2} \int_{\Sigma} d^2\xi \sqrt{h} \left(h^{ab} \partial_a X^I \partial_b X^J \delta_{IJ} + \epsilon^{ab} \partial_a \mathcal{A}_\mu^{(I)} \partial_b X^\mu \partial_b X^J \delta_{IJ} \right)$$

où δ_{IJ} est la métrique de Cartan du groupe de jauge G et $\mathcal{A}_\mu^{(i)}$ champs de jauge

Lagrangian à 2 dimensions

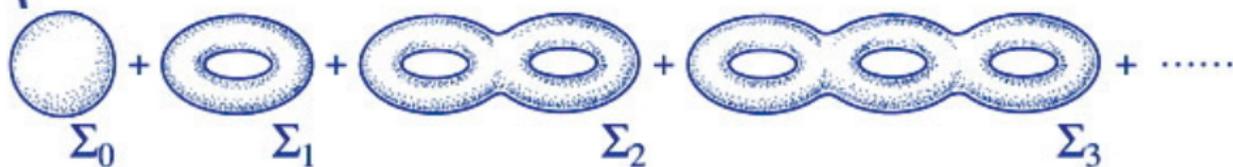
$$S_{\text{eff}}^{(D)}(g_{\mu\nu}, A_\mu, \dots)$$

$$= \sum_{\Sigma_\gamma} e^{-\phi \chi(\Sigma_\gamma)} \int_{M(\Sigma_\gamma)} \int d\psi dX \dots e^{\int d^2 z \mathcal{L}_{2d}(\psi, X, \dots, g_{\mu\nu}, A_\mu, \dots)}$$

$$= \int d^D x \sqrt{g} e^{-2\phi} \underbrace{[R + \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots]}_{\text{relativité générale}} + \mathcal{O}(m_{\text{planck}}^{-1})$$

relativité générale
théorie de gauge, &c

↑
corrections cordistes



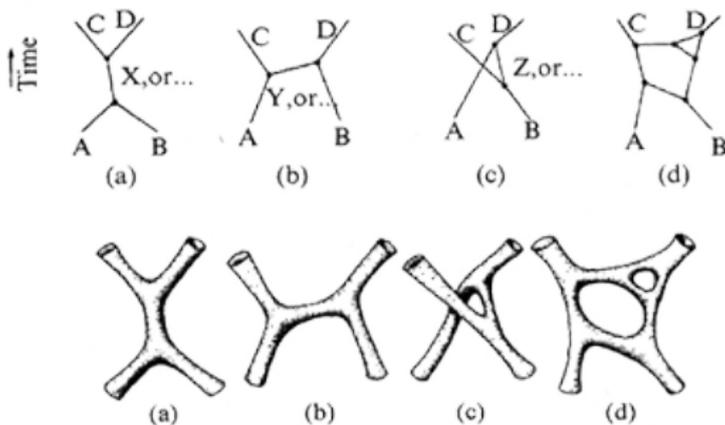
Développement en perturbation organisé par le genre de la surface

- ▶ Constante de couplage $g_s := e^\phi$
- ▶ poids caractéristique d'Euler : e.g. $\chi(\Sigma_\gamma) = 2(1 - g) \quad g \geq 0$

$$T_F = \frac{1}{2\pi\alpha'} \leq M_{\text{Planck}}^2 = (10^{18}\text{GeV})^2$$

est la tension de la corde son énergie par unité de longueur

Pour des énergie faibles $E \ll T_F$ la théorie des cordes a pour limite les théories des champs ponctuelles habituelles : théorie de jauge, théorie de gravité quantique



$$\mathcal{S}^{\text{YM}} = \int d^4x \sqrt{g} \frac{1}{g_{\text{YM}}^2} \left(\text{tr}(F^2) + f_1 \alpha' \text{tr}(F^4) + f_2 \alpha'^2 \text{tr}(F^2)^2 + \dots \right)$$

$$\mathcal{S}^{\text{Grav}} = \int d^4x \sqrt{g} \frac{1}{2\kappa^2} \left(\mathcal{R} + c_1 \alpha' \mathcal{R}^2 + c_3 \alpha'^3 \mathcal{R}^4 + \dots \right)$$

Les corrections en puissance de $\alpha' = 1/(2\pi T_F)$ dépendent des degrés de libertés fondamentaux de la théorie des cordes.

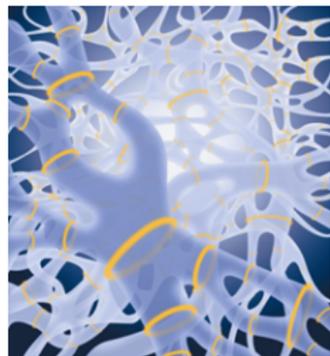
Leur étude est essentielle pour comprendre la nature quantique de la théorie des cordes et valider cette hypothèse comme théorie d'unification des interactions fondamentales et de théorie de gravitation quantique.

Deuxième partie II

SYMÉTRIES DE DUALITÉ

LA DUALITÉ T [1]

Considérons le cas d'une corde évoluant dans un espace-temps donnée par le produit direct de l'espace plat à 9 dimensions et d'un cercle S^1 de rayon R



$$\begin{aligned}\Sigma &\rightarrow \mathbb{R}^{1,8} \times S^1 \\ (\tau, \sigma) &\mapsto X^\mu(\tau, \sigma)\end{aligned}$$

$$S_{\text{grav}} = -\frac{T_F}{2} \int_{\Sigma} d^2\xi \sqrt{h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \mathcal{G}_{\mu\nu}$$

$X^\mu(\tau, \sigma)$ sont des fonctions harmoniques sur la surface d'univers

$$h^{ab} \partial_a \partial_b X^\mu(\tau, \sigma) = (\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2) X^\mu(\tau, \sigma) = 0$$

La solution classique est

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + x_\tau \tau + x_\sigma \sigma + \text{oscillateurs}$$

LA DUALITÉ T [2]

La corde s'enroule autour du cercle

$$X^g(\tau, \sigma + 2\pi) = X^g(\tau, \sigma) + 2\pi R m \quad m \in \mathbb{Z}$$

Son impulsion est quantifiée

$$X^g(\tau + 2\pi, \sigma) = X^g(\tau, \sigma) + 2\pi \alpha' \frac{n}{R} \quad m \in \mathbb{Z}$$

le développement en mode prend la forme suivante

$$X^g(\tau, \sigma) = x^g + \alpha' \frac{n}{R} \tau + \pi R m \sigma + \text{oscillateurs} \quad m \in \mathbb{Z}$$

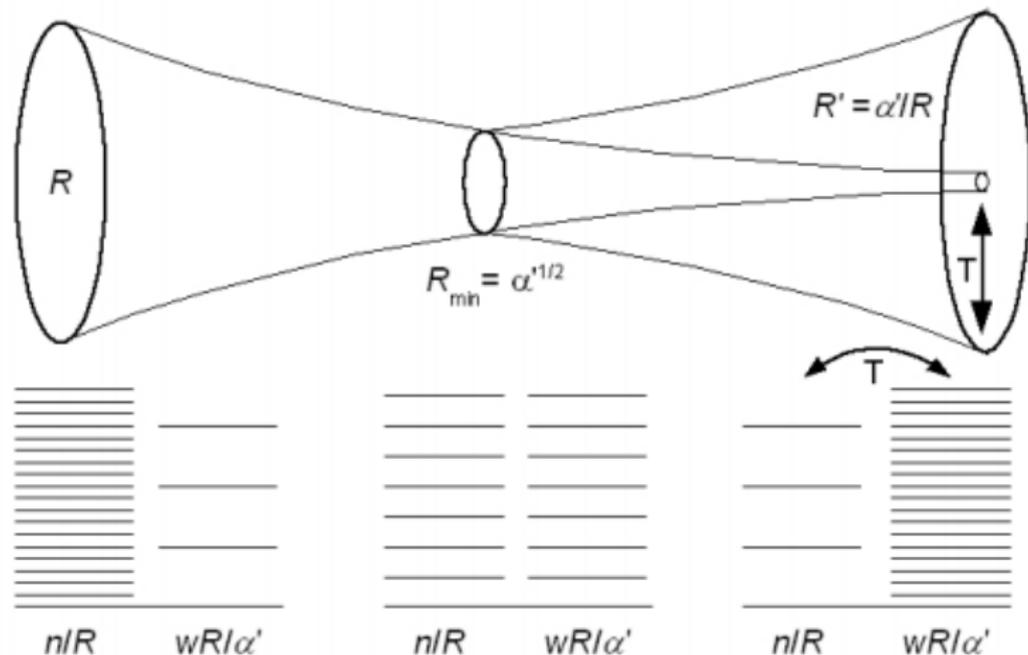
La masse de la corde

$$\alpha' M^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{\alpha'}}{R} n \right)^2 + \left(m \frac{R}{\sqrt{\alpha'}} \right)^2 \right] + \text{oscillateurs}$$

est invariante sous la transformation discrete \mathbb{Z}_2

$$R \leftrightarrow \frac{\alpha'}{R}; \quad (m, n) \leftrightarrow (n, m)$$

LA DUALITÉ T [3]



Pour la théorie des cordes les grandes dimensions sont équivalentes aux petites dimensions sous l'action de la dualité T

En général la masse de la corde enroulée sur un tore de dimension d $\mathcal{M}^d = \mathbb{T}^d$ est invariante sous le groupe discret $SO(d, d; \mathbb{Z})$

$$\alpha' M^2 = \frac{1}{2} \vec{n}^T \begin{pmatrix} G - BG^{-1}B & BG^{-1} \\ -G^{-1}B & G^{-1} \end{pmatrix} \vec{m} + \text{oscillators}; \quad (\vec{n}, \vec{m}) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$$

LA DUALITÉ S [1]

Considérons le système gravitationnel caractérisé par deux champs scalaires ϕ et $C^{(0)}$

$$\mathcal{S}_{2b} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{g} \left(\mathcal{R} - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} e^{2\phi} (\partial_\mu C^{(0)})^2 \right)$$

Le champ scalaire complexe $\Omega = C^{(0)} + ie^{-\phi}$ paramétrise l'espace quotient $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ et les configurations classiques de la théorie

$$\mathcal{S}_{2b} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{g} \left(\mathcal{R} - \frac{1}{2} \frac{\partial_\mu \Omega \partial^\mu \bar{\Omega}}{\text{Im}(\Omega)^2} \right)$$

La théorie classique est invariante sous l'action de $SL(2, \mathbb{R})$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$$

$$\Omega \rightarrow \frac{a\Omega + b}{c\Omega + d} \quad ad - bc = 1 \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

LA DUALITÉ S [2]

Cette symétrie, dite de dualité S, échange le couplage faible et le couplage fort en théorie des cordes

$$\frac{1}{g_s} := e^{-\phi_\infty} = \text{Im}(\Omega) \leftrightarrow g_s = e^{-\phi_\infty} = \frac{1}{\text{Im}(\Omega)}$$

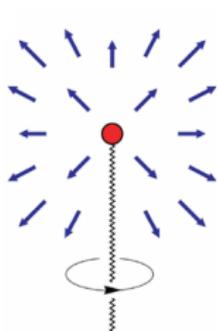
La théorie quantique n'est pas invariante sous la symétrie continue mais elle préserve le sous-groupe discret $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z}) \subset SL(2, \mathbb{R})$

$$\Gamma := SL(2, \mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

QUANTIFICATION DE LA CHARGE

L'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde de l'électron

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\partial} + ie\vec{A})^2 \Psi(t, \vec{x}) = i\hbar \frac{\partial \Psi(t, \vec{x})}{\partial t}$$



- ▶ en présence du champs crée par un monopole magnétique g

$$\vec{A}_+ - \vec{A}_- = \vec{\nabla} \left(\frac{g}{2\pi} \phi \right)$$

- ▶ Transformation de la fonction d'onde

$$\Psi(t, \vec{x}) \rightarrow e^{-ieg} \Psi(t, \vec{x})$$

La fonction d'onde doit être univaluée ce qui conduit Dirac à déduire la quantification de la charge de l'électron

$$eg \in 2\pi\mathbb{Z}$$

RÉSEAU DES CHARGES

L'électron et le monopole magnétique sont deux solutions duales des équations de Maxwell $F = dA$, $d\star F = e\delta^3(x)$

$$\int_{S^2} F = g \quad \int_{S^2} \star F = e$$

Un dyon a une charge électrique et magnétique $d_1 = (e_1, g_1)$

Deux dyons satisfont à la relation de quantification

$$e_1 g_2 - e_2 g_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$$

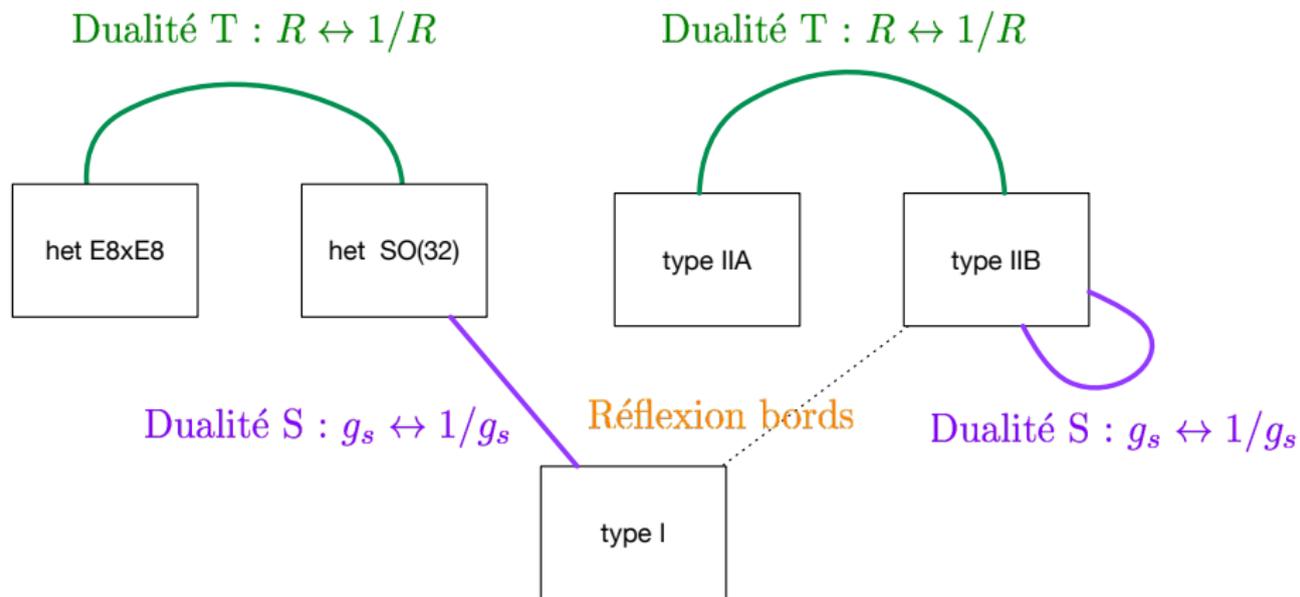
Cette condition est invariante sous la transformation $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$

$$\begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix}$$

avec

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}; \quad ad - bc = 1$$

Ces symétries de dualités relient différentes théories des cordes



LES DUALITÉS U

Les groupes $SO(d, d; \mathbb{Z})$ et $SL(2, \mathbb{Z})$ ne commutent pas et engendrent le groupe de dualité quantique de la théorie des cordes $E_{d+1}(\mathbb{Z})$

$$E_d(\mathbb{Z}) := \langle SO(d, d; \mathbb{Z}), SL(2, \mathbb{Z}) \rangle$$

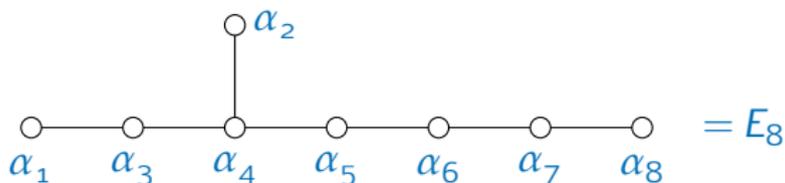
D	$E_{11-D(11-D)}(\mathbb{R})$	K_{11-D}	$E_{11-D}(\mathbb{Z})$
10A	\mathbb{R}^+	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
10B	$Sl(2, \mathbb{R})$	$SO(2)$	$Sl(2, \mathbb{Z})$
9	$Sl(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$	$SO(2)$	$Sl(2, \mathbb{Z})$
8	$Sl(3, \mathbb{R}) \times Sl(2, \mathbb{R})$	$SO(3) \times SO(2)$	$Sl(3, \mathbb{Z}) \times Sl(2, \mathbb{Z})$
7	$Sl(5, \mathbb{R})$	$SO(5)$	$Sl(5, \mathbb{Z})$
6	$SO(5, 5, \mathbb{R})$	$SO(5) \times SO(5)$	$SO(5, 5, \mathbb{Z})$
5	$E_{6(6)}(\mathbb{R})$	$USp(8)$	$E_{6(6)}(\mathbb{Z})$
4	$E_{7(7)}(\mathbb{R})$	$SU(8)/\mathbb{Z}_2$	$E_{7(7)}(\mathbb{Z})$
3	$E_{8(8)}(\mathbb{R})$	$Spin(16)/\mathbb{Z}_2$	$E_{8(8)}(\mathbb{Z})$

GROUPES DE CHEVALLEY [1]

D	$E_{11-D(11-D)}(\mathbb{R})$	K_{11-D}	$E_{11-D}(\mathbb{Z})$
10A	\mathbb{R}^+	1	1
10B	$Sl(2, \mathbb{R})$	$SO(2)$	$Sl(2, \mathbb{Z})$
9	$Sl(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$	$SO(2)$	$Sl(2, \mathbb{Z})$
8	$Sl(3, \mathbb{R}) \times Sl(2, \mathbb{R})$	$SO(3) \times SO(2)$	$Sl(3, \mathbb{Z}) \times Sl(2, \mathbb{Z})$
7	$Sl(5, \mathbb{R})$	$SO(5)$	$Sl(5, \mathbb{Z})$
6	$SO(5, 5, \mathbb{R})$	$SO(5) \times SO(5)$	$SO(5, 5, \mathbb{Z})$
5	$E_{6(6)}(\mathbb{R})$	$USp(8)$	$E_{6(6)}(\mathbb{Z})$
4	$E_{7(7)}(\mathbb{R})$	$SU(8)/\mathbb{Z}_2$	$E_{7(7)}(\mathbb{Z})$
3	$E_{8(8)}(\mathbb{R})$	$Spin(16)/\mathbb{Z}_2$	$E_{8(8)}(\mathbb{Z})$

- ▶ Le vide de la théorie des cordes est paramétré par la variété scalaire $\vec{\varphi} \in \mathcal{M}_D = E_D/K_D$
- ▶ $E_{d(d)}$ est la forme réelle déployée maximale d'un groupe de Chevalley, K_d est le sous-groupe compacte maximal

GROUPES DE CHEVALLEY [2]



Le diagramme de Dynkin détermine complètement

- ▶ Les constantes de structure et les entiers de Cartan dont on déduit l'algèbre de Lie \mathfrak{g}
- ▶ Le groupe de Chevalley G dont les points réels $G(\mathbb{R})$ forment un groupe de Lie agissant sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} par l'action adjointe
- ▶ Les points entiers $G(\mathbb{Z})$ sont le stabilisateur de l'espace sur \mathbb{Z} engendré par la base de Chevalley sous l'action adjointe

RÉSEAU DES CHARGES

Les configurations du vide de la théorie des cordes sur l'espace-temps $\mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{T}^6$ est paramétrée par 70 scalaires qui sont les coordonnées de l'espace quotient $E_{7(7)}(\mathbb{R})/(SU(8)/\mathbb{Z}_2)$

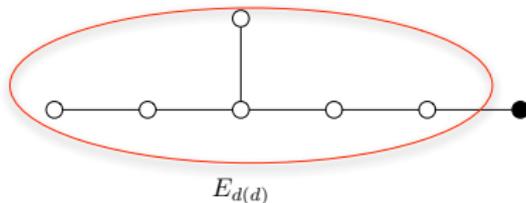
Les solutions de trou noir portent 56 charges électromagnétiques quantifiées dans représentation fidèle du groupe symplectique $Sp(56)$.

La théorie est invariante sous le le groupe discret de symétrie $E_{7(7)}(\mathbb{Z}) = E_{7(7)}(\mathbb{R}) \cap Sp(56, \mathbb{Z})$. C'est le *même* réseau que celui obtenu par la construction de Chevalley!

Pour les groupes $E_{d+1}(\mathbb{Z})$ avec $d \leq 6$ il existe une définition équivalente (plus proche de l'intuition physique)
 $E_{d+1}(\mathbb{Z}) = E_{d+1}(\mathbb{R}) \cap GL(\dim R, \mathbb{Z})$ où R est une représentation fidèle

GROUPES DE DUALITÉ ET GÉOMÉTRIE [1]

Le groupe de dualité E_d en dimension $D + 1$ est plongé dans le sous-groupe parabolique maximal $P_{\alpha_{d+1}} = L_{\alpha_{d+1}} U$ avec facteur de Levy $L_{\alpha_{d+1}} = GL(1) \cdot E_d$ du groupe de dualité E_{d+1}

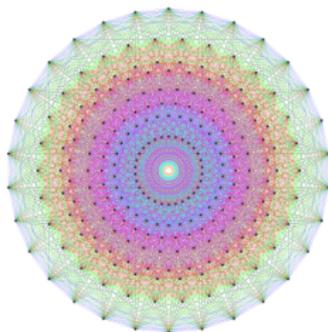
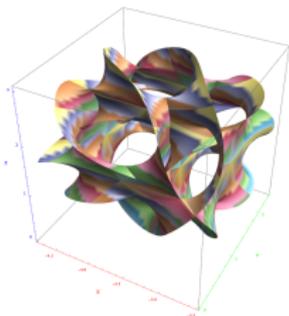


La paramètre du facteur $GL(1)$ est la rayon du cercle de compactification de la théorie the radius of circle compactification of the theory from dimensions $D + 1$ to D $r^2 = r_{10-D}/\ell_{D+1}$

$$\mathbb{R}^{1,4} \times \mathbb{T}^5 \times S^1(r_{10-D}) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \mathbb{R}^{1,4} \times \mathbb{T}^5$$

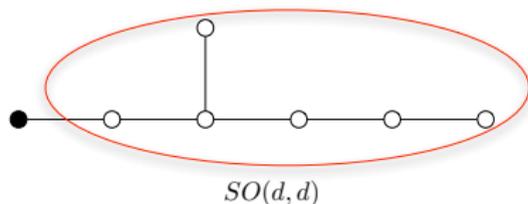
GROUPES DE DUALITÉ ET GÉOMÉTRIE [2]

Ainsi toute l'information sur la géométrie des dimensions supplémentaires est contenue dans les propriétés du groupe de dualité

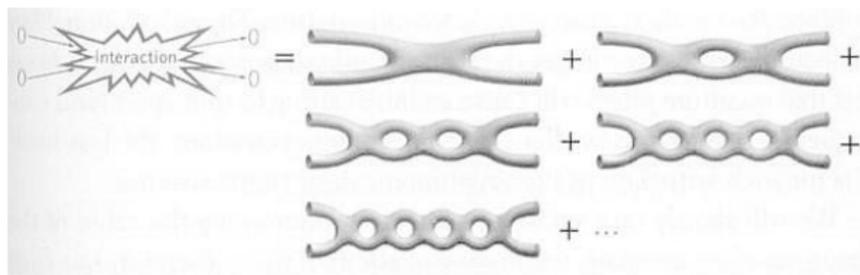


GRUPE DE DUALITÉ ET CORDES PERTURBATIVE

La symétrie de dualité T de la théorie des cordes libre $SO(d, d)$ est obtenue en considérant le sous-groupe parabolique maximal $P_{\alpha_1} = L_{\alpha_1} U_{\alpha_1}$ of E_{d+1} où le facteur de Levi est $GL(1) \cdot SO(d, d)$



Le paramètre $GL(1)$ est la constante de couplage de cordes $r^2 = 1/g_D^2$



Troisième partie III

FORMES AUTOMORPHES EN THÉORIE DES CORDES

INTERACTIONS EN THÉORIE DES CORDES

- ▶ La diffusion de deux gravitons en théorie des cordes prend la forme générique suivante $\sigma_k = s^k + t^k + u^k$, $\sigma_1 = 0$, $s, t, u \propto \alpha' \partial^2$

$$T_D(\vec{\varphi}, \sigma_{2,3}) = \frac{\mathcal{E}_{(0,-1)}^{(D)}(\vec{\varphi})}{\sigma_3} + \sum_{p,q \geq 0} \mathcal{E}_{(p,q)}^{(D)}(\vec{\varphi}) \sigma_2^p \sigma_3^q$$

- ▶ $\mathcal{E}_{(0,-1)}^{(D)}(\vec{\varphi}) = 1$: Reproduit la théorie Einstein de la diffusion de gravitons
- ▶ Les coefficients sont des fonctions des paramètres de la théorie $\vec{\varphi}$ dans l'espace quotient $E_{d+1}(\mathbb{R})/K_{d+1}$
- ▶ La quantification des charges implique que la théorie est invariante sous l'action du sous-groupe discret $\Gamma = E_{d+1}(\mathbb{Z})$

$$\mathcal{E}_{(p,q)}^{(D)}(\gamma \cdot \vec{\varphi}) = \mathcal{E}_{(p,q)}^{(D)}(\vec{\varphi}); \quad \gamma \in E_{d+1}(\mathbb{Z})$$

CONTRAINTE DIFFÉRENTIELLES [1]

La supersymétrie de la théorie implique que les couplages satisfont aux équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned}\left(\Delta - \frac{3(11-D)(D-8)}{D-2}\right) \mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)} &= 6\pi\delta_{D-8,0} \\ \left(\Delta - \frac{5(12-D)(D-7)}{D-2}\right) \mathcal{E}_{(1,0)}^{(D)} &= 80\zeta(2)\delta_{D-7,0} + 14\mathcal{E}_{(0,0)}^{(6)}\delta_{D-6,0} \\ \left(\Delta - \frac{6(14-D)(D-6)}{D-2}\right) \mathcal{E}_{(0,1)}^{(D)} &= -(\mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)})^2 - 40\zeta(3)\delta_{D-6,0} \\ &\quad - \frac{55}{3}\mathcal{E}_{(0,0)}^{(5)}\delta_{D-5,0} - \frac{85}{2\pi}\mathcal{E}_{(1,0)}^{(4)}\delta_{D-4,0}\end{aligned}$$

CONTRAINTES DIFFÉRENTIELLES [2]

Les valeurs propres s'annulent exactement pour les valeurs des dimensions associées au comportement à haute énergie (ultraviolet) de la théorie de supergravité maximale

$$D_c = \begin{cases} 8 & \text{for } L = 0 \\ 4 + 6/L & \text{for } 2 \leq L \leq 4 \end{cases}$$

Ainsi ces formes automorphes contiennent les informations sur le comportement à haute énergie de la théorie de supergravité maximale en accord avec les calculs en perturbation par Bern et al.

CONDITIONS AUX LIMITES

- ▶ Si $P = LU$ où $L = GL(1) \cdot G'$ alors $r \rightarrow \infty$ le terme constant est la somme

$$\phi^G = \sum_i r^{\alpha_i} \phi^{G'}(g) + O(e^{-r}) \quad r \rightarrow \infty$$

- ▶ où $\phi^{G'}(g)$ est une forme automorphe pour G' du facteur de Levy
- ▶ Un cas particulier est la formule de Langlands pour les termes constants des séries Eisenstein qui sont une somme sur l'action du groupe de Weyl

La relation géométrique et la série perturbative des cordes permet de contraindre la forme des termes constants

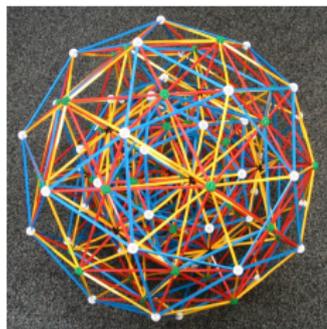
CONDITIONS AUX LIMITES : SÉRIE PERTURBATIVE $g_D \rightarrow 0$

$$\mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)} = g_D^{-2} \frac{8-D}{D-2} \left(\frac{2\zeta(3)}{g_D^2} + I_{1\text{-boucles}} \right) + O\left(e^{-\frac{1}{g_D}}\right)$$

$$\mathcal{E}_{(1,0)}^{(D)} = g_D^{-4} \frac{7-D}{D-2} \left(\frac{\zeta(5)}{g_D^2} + I_{1\text{-boucles}} + g_D^2 I_{2\text{-boucles}} \right) + O\left(e^{-\frac{1}{g_D}}\right)$$

$$\mathcal{E}_{(0,1)}^{(D)} = g_D^{-6} \frac{6-D}{D-2} \left(\frac{2\zeta(3)^2}{3g_D^2} + I_{1\text{-boucles}} + g_D^2 I_{2\text{-boucles}} + g_D^4 I_{3\text{-boucles}} \right) + O\left(e^{-\frac{1}{g_D}}\right)$$

$I_{g\text{-boucles}}$ formes automorphes pour $SO(10-D, 10-D)$ venant de l'intégration sur la surface Σ_g



On aurait pu avoir autant de termes que l'ordre du groupe de Weyl

$$|W(E_7)| = 2903040;$$

$|W(E_8)| = 696729600$ mais la théorie des cordes fait un choix très spécial

CONDITIONS AUX LIMITES : DÉCOMPACTIFICATION $r_d \rightarrow \infty$

Le terme constant par rapport au sous-groupe parabolique maximal $M_{\alpha_{d+1}} = GL(1) \times E_{(d,d)}$ avec pour paramètre $GL(1)$ le rayon $r^2 = r_d/\ell_D$

$$\mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)} \sim \frac{r_d}{\ell_{D+1}} \mathcal{E}_{(0,0)}^{(D+1)} + \left(\frac{r_d}{\ell_{D+1}}\right)^{8-D} \zeta(8-D) + O(e^{-\frac{r_d}{\ell_D}})$$

$$\mathcal{E}_{(1,0)}^{(D)} \sim \frac{r_d}{\ell_{D+1}} \mathcal{E}_{(1,0)}^{(D+1)} + \left(\frac{r_d}{\ell_{D+1}}\right)^{6-D} \mathcal{E}_{(0,0)}^{(D+1)} + \left(\frac{r_d}{\ell_{D+1}}\right)^{12-D} \zeta(12-D) + O(e^{-\frac{r_d}{\ell_D}})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(0,1)}^{(D)} &\sim \frac{r_d}{\ell_{D+1}} \mathcal{E}_{(0,1)}^{(D+1)} + \left(\frac{r_d}{\ell_{D+1}}\right)^{14-D} \zeta(14-D) \\ &+ \left(\frac{r_d}{\ell_{D+1}}\right)^{8-D} \mathcal{E}_{(0,0)}^{(D+1)} + \left(\frac{r_d}{\ell_{D+1}}\right)^{4-D} \mathcal{E}_{(1,0)}^{(D+1)} + O(e^{-\frac{r_d}{\ell_D}}) \end{aligned}$$

SOLUTION : SÉRIES D'EISENSTEIN INDUITES

Grâce à la croissance polynomiale pour $r^2 \rightarrow \infty$ il est possible de déterminer complètement et uniquement que les solutions aux deux premières équation différentielles sont des séries d'Eisenstein induites

DEFINITION (SÉRIES D'EISENSTEIN INDUITES)

Pour P_β le sous-groupe parabolique maximal attachée à la racine simple β soit $\lambda = s\omega_\beta - \rho$ avec $\langle \omega_\beta, \beta \rangle = \delta_{\alpha=\beta}$ la série d'Eisenstein induite de la fonction constante sur le sous-groupe parabolique maximal

$$E_{\beta,s}^G(g) = \sum_{\gamma \in P_\beta(\mathbb{Z}) \backslash G(\mathbb{Z})} e^{2s\langle \omega_\beta, H(\gamma g) \rangle}$$

avec la décomposition d'Iwasawa $g = nak \in G$ et $a = \exp(H(g))$

DES SOLUTIONS SIMPLES [1]

$$\mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)} = 2\zeta(3) E_{\alpha_1; \frac{3}{2}}^{E_{d+1}}; \quad \text{for } 3 \leq d \leq 7 \text{ and } d = 0$$

$$\mathcal{E}_{(1,0)}^{(D)} = \zeta(3) E_{\alpha_1; \frac{5}{2}}^{E_{d+1}}; \quad \text{for } 5 \leq d \leq 7 \text{ and } d = 0$$

$E_{d+1}(\mathbb{Z})$	$\mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)}$	$\mathcal{E}_{(1,0)}^{(D)}$
$E_{8(8)}(\mathbb{Z})$	$2\zeta(3) E_{[1\ 0^7]; \frac{3}{2}}^{E_8}$	$\zeta(5) E_{[1\ 0^7]; \frac{5}{2}}^{E_8}$
$E_{7(7)}(\mathbb{Z})$	$2\zeta(3) E_{[1\ 0^6]; \frac{3}{2}}^{E_7}$	$\zeta(5) E_{[1\ 0^6]; \frac{5}{2}}^{E_7}$
$E_{6(6)}(\mathbb{Z})$	$2\zeta(3) E_{[1\ 0^5]; \frac{3}{2}}^{E_6}$	$\zeta(5) E_{[1\ 0^5]; \frac{5}{2}}^{E_6}$
$SO(5, 5, \mathbb{Z})$	$2\zeta(3) E_{[1\ 0000]; \frac{3}{2}}^{SO(5,5)}$	$\zeta(5) \widehat{E}_{[1\ 0000]; \frac{5}{2}}^{SO(5,5)} + \frac{8\zeta(6)}{45} \widehat{E}_{[00001]; 3}^{SO(5,5)}$
$SL(5, \mathbb{Z})$	$2\zeta(3) E_{[1\ 000]; \frac{3}{2}}^{SL(5)}$	$\zeta(5) \widehat{E}_{[1\ 000]; \frac{5}{2}}^{SL(5)} + \frac{6\zeta(5)}{\pi^3} \widehat{E}_{[0010]; \frac{5}{2}}^{SL(5)}$
$SL(3, \mathbb{Z}) \times SL(2, \mathbb{Z})$	$2\zeta(3) \widehat{E}_{[10]; \frac{3}{2}}^{SL(3)} + 2\widehat{E}_1(U)$	$\zeta(5) E_{[10]; \frac{5}{2}}^{SL(3)} - 8\zeta(4) \widehat{E}_{[10]; -\frac{1}{2}}^{SL(3)} E_2(U)$
$SL(2, \mathbb{Z})$	$2\zeta(3) E_{\frac{3}{2}}(\Omega) v_1^{-\frac{3}{7}} + 4\zeta(2) v_1^{\frac{4}{7}}$	$\frac{\zeta(5) E_{\frac{5}{2}}}{v_1^{\frac{5}{7}}} + \frac{4\zeta(2)\zeta(3)}{15} v_1^{\frac{9}{7}} E_{\frac{3}{2}} + \frac{4\zeta(2)\zeta(3)}{15v_1^{\frac{12}{7}}}$
$SL(2, \mathbb{Z})$	$2\zeta(3) E_{\frac{3}{2}}(\Omega)$	$\zeta(5) E_{\frac{5}{2}}(\Omega)$

THEOREM (INTÉGRABILITÉ DES SOLUTIONS)

- ▶ Le coefficient du terme d'Einstein $\mathcal{E}_{(0,-1)}^{(D)} = 1$ est de carré intégrable pour tous les groupes de dualité
- ▶ Le coefficient $\mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)} = 2\zeta(3)E_{\alpha_1; \frac{3}{2}}^{E_{d+1}}$ est de carré intégrable pour les groupe de dualité E_{d+1} avec $4 \leq d \leq 7$
- ▶ Le coefficient $\mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)} = \zeta(3)E_{\alpha_1; \frac{5}{2}}^{E_{d+1}}$ est de carré intégrable pour les groupe de dualité E_{d+1} avec $6 \leq d \leq 7$

Le coefficient de $\mathcal{E}_{(0,1)}^{(D)}$ n'est pas une série d'Eisenstein et sera discuté en détail dans le cas modulaire

Quatrième partie IV

MODES DE FOURIER ET TROUS NOIRS

MODES DE FOURIER ET PHYSIQUE

- ▶ La simplicité des solutions se reflète dans la nature des coefficients de Fourier. Les coefficients de Fourier sont contraints par différentes considérations physiques (en particulier la supersymétrie). Seul un petit nombre de coefficients est non nul.
- ▶ La forme des coefficients de Fourier correspond *exactement* aux effets non-perturbatifs de trous noirs microscopiques en théorie des cordes
- ▶ Nous nous concentrons ici sur le cas du sous-groupe parabolique maximal

$$P_{\alpha_{d+1}} = GL(1) \cdot E_d \times U_{\alpha_{d+1}} \subset E_{d+1}$$

Associé à la compactification de la théorie en la dimension $D + 1$ à une théorie en dimension $D = 10 - d$ sur un cercle de rayon

$$r^2 = r_d / \ell_{D+1}$$

COEFFICIENTS DE FOURIER [1]

- ▶ Soit $\theta_i \in U \cong \mathbb{R}^m$ un ensemble de charges continues **commutantes** on définit alors *les modes fourier*

$$\mathcal{F}_{(p,q)}^{(D)}[Q, \varphi] := \int_{[0,1]^m} d\theta \mathcal{E}_{(p,q)}^{(D)}(\varphi, \theta) e^{2i\pi Q \cdot \theta}$$

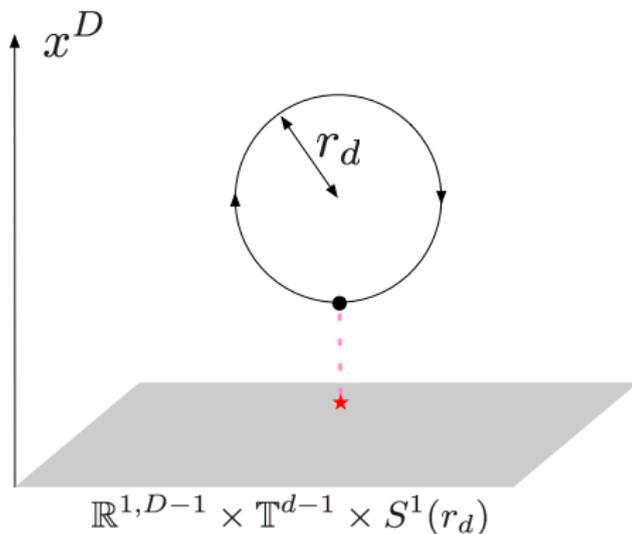
- ▶ la fonction automorphes est la somme de ses modes de Fourier

$$\mathcal{E}_{(p,q)}^{(D)}(\varphi, \theta) = \sum_{Q \in \Gamma_d} \mathcal{F}_{(p,q)}^{(D)}[Q, \varphi] e^{-2i\pi Q \cdot \theta}$$

- ▶ Le coefficient de Fourier associé à un sous-groupe parabolique $P_\alpha = L_\alpha U_\alpha$ de E_{d+1} est une somme sur les charge *entières* $Q \in \Gamma_d = E_{d+1}(\mathbb{Z}) \cap U_{\alpha_{d+1}}$ conjuguées à la variables angulaire dans le facteur unipotent $\theta \in U_{\alpha_{d+1}}$

COEFFICIENTS DE FOURIER [2]

$$\mathcal{F}_{(p,q)}^{(D)}[Q, \varphi] \sim \sum_{Q \in \mathbb{Z}^n} d_Q f_Q(\varphi) e^{-2\pi r_d m_Q}$$



COEFFICIENTS DE FOURIER [3]

$$\mathcal{F}_{(p,q)}^{(D)}[Q, \varphi] \sim \sum_{Q \in \mathbb{Z}^n} d_Q f_Q(\varphi) e^{-2\pi r_d m_Q}$$

- ▶ m_Q est la masse de la particule en dimension $D + 1$ qui devient un instanton une fois enroulé sur le cercle (euclidien) de rayon r_d
- ▶ d_Q est une grandeur de théorie des nombre comptant le nombre de configurations instantoniques. E.g. $d_Q^{(0,0)} = \sum_{\delta|Q} \delta^{7-D}$
- ▶ Les coefficients de Fourier sont fonctions des paramètres du groupe de symétrie $\varphi \in E_d/K_d$
- ▶ $f_Q(\varphi)$ est induite par les fluctuations quantiques. C'est une fonction automorphe sous le groupe de symétrie résiduel E_d en dimension $D + 1$

ORBITES COADJOINTES NILPOTENTES [1]

$$\mathcal{F}_{(p,q)}^{(D)}[Q, \varphi] \sim \sum_{Q \in \mathbb{Z}^n} d_Q f_Q(\varphi) e^{-2\pi r_d m_Q}$$

- ▶ Les charges discrètes $Q \in E_{d+1}(\mathbb{Z}) \cap U_{\alpha_{d+1}}$ décrivent des *orbites discrètes*
- ▶ L'action (complexifiée) du facteur de Levi $L_{\alpha_1} = GL(1) \cdot E_d$ agit par action de conjugaison sur les variables angulaires θ
- ▶ Par dualité de Fourier cette action induit sur les charge une action discrete de l'intersection du facteur de Levi avec le groupe discret du dualité discret de dualité $L_\alpha \cap E_{d+1}(\mathbb{Z})$
- ▶ Sous cette action s'organise en représentations irréductibles en peuplant *des orbites coadjointes nilpotentes* $\mathfrak{o} \in E_d/H_d$ où H_d est le stabilisateur du groupe

ORBITES COADJOINTES NILPOTENTES [2]

- ▶ Ces orbites sont caractérisées par des conditions sur les représentations des charges élémentaires

E_{d+1}	$M_{\alpha_{d+1}}$	V_{α_d}
E_8	E_7	$q^i : 56, q : 1$
E_7	E_6	$q^i : 27$
E_6	$SO(5,5)$	$S_\alpha : 16$
$SO(5,5)$	$SL(5)$	$v_{[ij]} : 10$
$SL(5)$	$SL(3) \times SL(2)$	$v_{ia} : 3 \times 2$
$SL(3) \times SL(2)$	$SL(2) \times \mathbb{R}^+$	$vv_a : 2$

- ▶ L'action adjointe du groupe de symétrie E_d sur les variables angulaires θ est irréductible si et seulement si U_α est Abélien. C'est le cas tous les groupes de dualité sauf E_8 où le Monopole de Kaluza-Klein à une charge non abélienne

SUPPORT DES MODES DE FOURIER [1]

$$\mathcal{F}_{(p,q)}^{(D)}[Q, \varphi] \sim \sum_{Q \in \mathbb{Z}^n} d_Q f_Q(\varphi) e^{-2\pi r_d m_Q}$$

- ▶ Les coefficients de Fourier coefficients sont non nuls seulement si les variables angulaires θ appartiennent a une orbite \circ
- ▶ Les orbites ont un ordre partiel donné par l'inclusion

LEMMA (FRONT D'ONDE)

Si ϕ est une représentation automorphe son front d'onde $\mathcal{O}_G(\phi)$ est l'orbite \circ telle que si $\circ' > \circ$ alors ϕ les coefficients de Fourier sur \circ' sont nuls mais de Fourier non nul sur \circ .

- ▶ Une représentation irréductible est associée a une orbite coadjoint nilpotente par son *front d'onde*

SUPPORT DES MODES DE FOURIER [2]

- ▶ Un théorème donne que le front d'onde est toujours la clôture d'une unique orbit nilpotente coadjointe

Ainsi à toute orbite nilpotente coadjointe est attachée une représentation automorphe irréductible

- ▶ Un cas particulier est la première orbite non-triviale la plus simple préservant la moitié des supersymétries $\frac{1}{2}$ -BPS

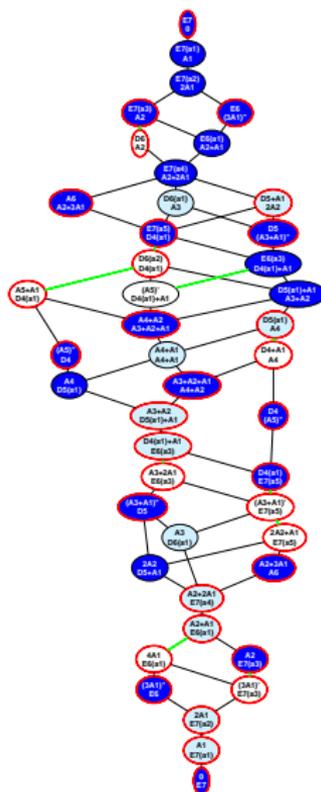
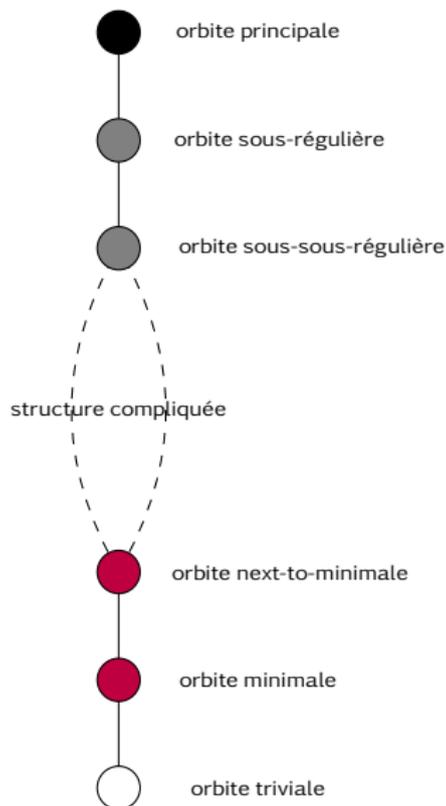
$$\mathcal{O}_{\frac{1}{2}\text{-BPS}} = \frac{E_{d+1}}{E_d \times \mathbb{R}^{n_d}}$$

- ▶ n_d est le nombre de charge supersymétriques $\frac{1}{2}$ -BPS en dimension $D - 1$

▶ Orbits

C'est ce que donne la théorie des cordes

SUPPORT DES MODES DE FOURIER [3]



COUPLAGES EN THÉORIE DES CORDES

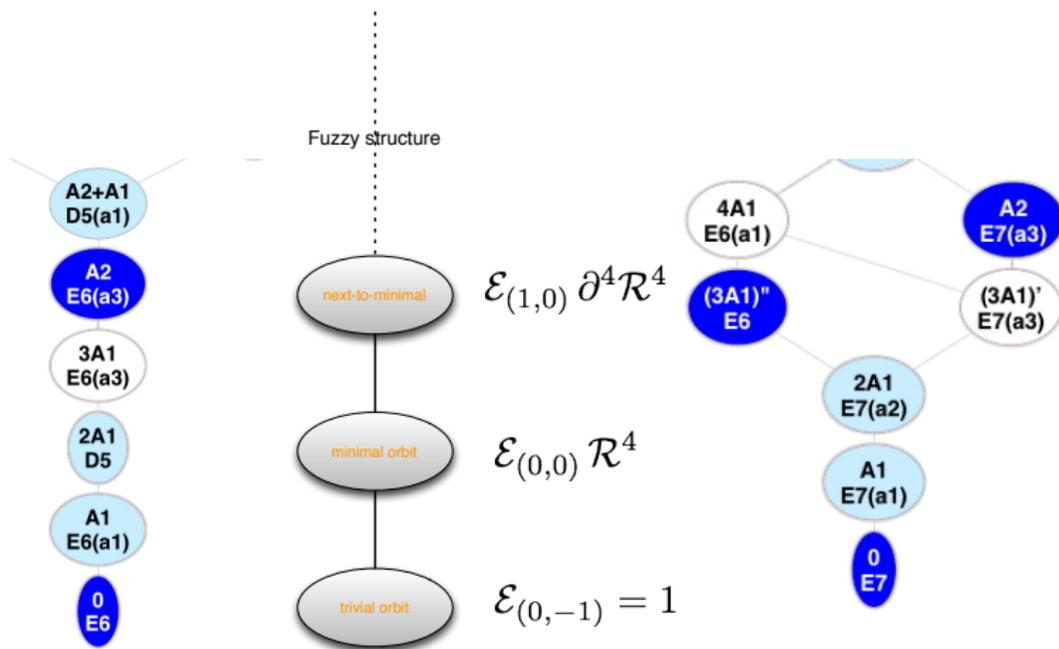
THEOREM (GREEN-MILLER-VANHOVE)

Pour les groupes de dualité E_{d+1} en dimensions $4 \leq D \leq 10$ alors

- 1 Le front d'onde de la représentation automorphe associée au couplage au couplage $\mathcal{E}_{(0,-1)}^{(D)} = 1$ est l'orbite triviale
- 2 Le front d'onde de la représentation automorphe associée au couplage $\mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)}$ est la clôture de l'orbite minimale.
- 3 Le front d'onde de la représentation automorphe associée au couplage $\mathcal{E}_{(1,0)}^{(D)}$ est la clôture de l'orbite next-to-minimale (NTM)

- ▶ La clôture de l'orbite minimale est l'union de l'orbite triviale et de l'orbite minimale
- ▶ La clôture de l'orbite next-to-minimal est l'union cette orbite, de l'orbite minimale et de l'orbite triviale
- ▶ Ces conditions sur les supports des coefficients de Fourier sont en adéquation avec les contraintes attendue pour la supersymétrie

DIAGRAMME DE FERMETURE DE SÉRIES D'EISENSTEIN



Cinquième partie V

LE CAS MODULAIRE

LA THÉORIE DE TYPE IIB [1]

La théorie des cordes de type IIB est définie en dimension 10 sur $\mathbb{R}^{1,9}$.
Les configurations du vide sont paramétrée par le scalaire complexe

$$\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2 \in SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$$

Le groupe de dualité est $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ agissant sur Ω

$$\gamma \cdot \Omega = \frac{a\Omega + b}{c\Omega + d} \quad \gamma \in SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

Les couplages sont des formes ou fonction modulaires

$$\mathcal{E}_{(p,q)}^{(10)} \left(\frac{a\Omega + b}{c\Omega + d} \right) = \mathcal{E}_{(p,q)}^{(10)}(\Omega)$$

LA THÉORIE DE TYPE IIB [2]

En particulier se sont des fonctions périodiques

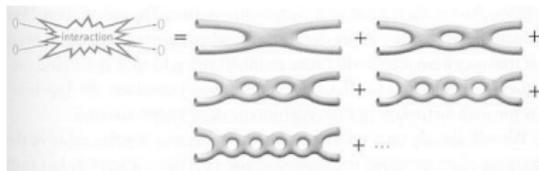
$$\mathcal{E}_{(p,q)}^{(10)}(\Omega + 1) = \mathcal{E}_{(p,q)}^{(10)}(\Omega)$$

dont on peut faire le développement de Fourier

$$\mathcal{E}_{(p,q)}^{(10)}(\Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{(p,q),n}^{(10)}(\Omega_2) e^{2i\pi n \Omega_1}$$

Les modes de Fourier sont fonction de la constante de couplage des cordes $\Omega_2 = 1/g_s$ et sont contraint par des calcul en perturbation

$$\text{Amplitude} = \Omega_2^2 A_{g=0} + A_{g=1} + \Omega_2^{-2} A_{g=2} + \dots$$



LA THÉORIE DE TYPE IIB [3]

$$f_{(0,0),0}^{(10)} = \int_0^1 \mathcal{E}_{(0,0)}^{(10)}(\Omega) d\Omega_1 = \Omega_2^{-\frac{1}{2}} (2\zeta(3)\Omega_2^2 + 4\zeta(2))$$

$$f_{(1,0),0}^{(10)} = \int_0^1 \mathcal{E}_{(1,0)}^{(10)}(\Omega) d\Omega_1 = \Omega_2^{\frac{1}{2}} \left(\zeta(5)\Omega_2^2 + 0 + \frac{8\zeta(4)}{3}\Omega_2^{-2} \right)$$

$$f_{(0,1),0}^{(10)} = \int_0^1 \mathcal{E}_{(0,1)}^{(10)}(\Omega) d\Omega_1 = \Omega_2 \left(\frac{2\zeta(3)^2}{3}\Omega_2^2 + \frac{4\zeta(2)\zeta(3)}{3} + \frac{4\zeta(4)}{\Omega_2^2} + \frac{4\zeta(6)}{26\Omega_2^4} \right) + O(e^{-\Omega_2})$$

À l'ordre des arbres et à une boucles (ordre Ω_2^2 et Ω_2^0) les coefficients sont des *valeurs zêta multiples univaluées* construites par Francis Brown

LA THÉORIE DE TYPE IIB [4]

Ces couplages satisfont les équations différentielles

$$\left(\Delta - \frac{3}{4}\right) \mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)} = 0;$$

$$\left(\Delta - \frac{5}{4}\right) \mathcal{E}_{(1,0)}^{(D)} = 0;$$

$$\left(\Delta - 12\right) \mathcal{E}_{(0,1)}^{(D)} = -\left(\mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)}\right)^2$$

où $\Delta = \Omega_2^2 (\partial_{\Omega_1}^2 + \partial_{\Omega_2}^2)$ est le Laplacien hyperbolique

LA THÉORIE DE TYPE IIB [5]

Les conditions au limites aux pointes $\Omega_2 \rightarrow \infty$ impliquent que les deux premiers couplages sont des séries d'Eisenstein

$$\mathcal{E}_{(0)}^{(10)}(\Omega) = 2\zeta(3)E_{\frac{3}{2}}(\Omega)$$

$$\mathcal{E}_{(2)}^{(10)}(\Omega) = \zeta(5)E_{\frac{5}{2}}(\Omega)$$

Eisenstein series $E_s(\Omega)$

$$\begin{aligned} E_s(\Omega) &= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash SL(2, \mathbb{Z})} (\text{Im}(\gamma \cdot \Omega))^s = \sum_{\gcd(m, n)=1} \frac{(\text{Im}\Omega)^s}{|m\Omega + n|^{2s}} \\ &= 2\zeta(2s)\Omega_2^s + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s - \frac{1}{2})\zeta(2s - 1)}{\Gamma(s)} \Omega_2^{1-s} \\ &\quad + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{n \neq 0} |n|^{s-\frac{1}{2}} \sum_{d||n} d^{1-2s} \sqrt{\Omega_2} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|\Omega_2) e^{2i\pi n\Omega_1} \end{aligned}$$

LA THÉORIE DE TYPE IIB [6]

$\mathcal{E}_{(0,1)}^{(10)}(\Omega)$ n'est pas une série d'Eisenstein

$$(\Delta - 12)\mathcal{E}_{(3)}^{(D)} = -(2\zeta(3)E_{\frac{3}{2}})^2$$

La solution de l'équation différentielle est

$$\mathcal{E}_{(0,1)}^{(10)}(\Omega) = \frac{2\zeta(3)^2}{3}E_{\frac{3}{2}}(\Omega) + \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} \Phi(\gamma\Omega)$$

$$\Phi(x + iy) = 4\zeta(3) \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sigma_{-2}(|n|) e^{2i\pi n(x+u)} \right) h\left(\frac{x}{y}\right) du$$

où $h(x)$ est l'unique fonction paire réelle C^∞ avec $h(x) \sim_{x \rightarrow \pm\infty} 1/(6|x|^3)$ satisfaisant

$$\left(\frac{d}{dx}(1+x^2) \frac{d}{dx} - 12 \right) h(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

CONCLUSION AND OUTLOOK [1]



There are five elementary arithmetical operations : addition, subtraction, multiplication, division, and ... modular forms.

- ▶ La théorie des cordes donne des exemples concrets de représentations automorphes associées à des orbites coadjointes nilpotentes

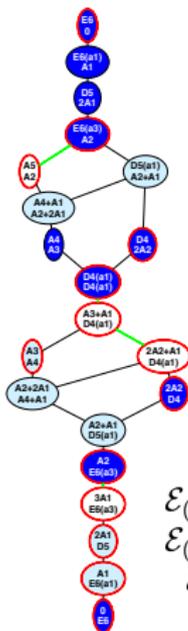
CONCLUSION AND OUTLOOK [2]

Comments on the impact of Dynkin's work on current research in representation theory

David A. Vogan, Jr.
Department of Mathematics,
Massachusetts Institute of Technology

A central problem in the representations of reductive Lie groups is constructing unitary representations attached to the nilpotent coadjoint orbits.

In a related direction, Arthur's conjectures (still unproved) relate homomorphisms of $SL(2)$ to residues of Eisenstein series. Colette Moeglin has done great work in the direction of proving that the residues predicted by Arthur (with Dynkin's tables) actually exist. The residues give rise to interesting unitary automorphic representations that are difficult to construct in any other way. Her first paper on this subject is "Orbites unipotentes



CONCLUSION AND OUTLOOK [3]

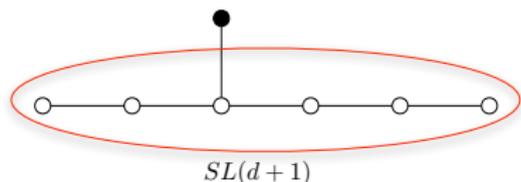
- ▶ Sauf des cas très particuliers la théorie des cordes nécessite des représentations automorphes plus générales que des séries d'Eisenstein
- ▶ C'est une question importante pour les physiciens et les mathématiciens d'identifier les représentations automorphes attachées aux orbites dans les diagrammes de Hasse des groupes de dualité
- ▶ Les modes de Fourier ont une interprétation physique claire en terme de contributions instantoniques de trous noirs microscopiques supersymétriques
- ▶ La théorie des formes automorphes permet de capturer le comportement ultraviolet de la théorie de supergravité sous-jacente et aussi analyser la relation entre la théorie des champs et la complétude ultraviolette de la théorie

Sixième partie VI

APPENDICES

GROUPE DE DUALITÉ ET COUPLAGE FORT : THÉORIE M

- ▶ La théorie des cordes en dimensions $D \leq 10$ peut être obtenue par compactification de la théorie M sur un tore de dimension $d + 1$. La symétrie géométrique de la théorie M est $SL(d + 1)$
- ▶ Ce groupe de symétrie est obtenue en considérant le sous-groupe parabolique maximal par rapport à la racine α_2 $P_{\alpha_2} = L_{\alpha_2} U_{\alpha_2}$ de E_{d+1} dont le facteur de Levi $GL(1) \cdot SL(d + 1)$



- ▶ Le paramètre $GL(1)$ est le volume du tore $r^2 = \mathcal{V}_{d+1}^{\frac{1}{d+1}} / \ell_{11}^3$

◀ Return

ORBITS AND SUPERSYMMETRIC ORBITS

$M_{\alpha_{d+1}} = E_d$	BPS	BPS condition	Orbit	Dim.
$SL(2)$	$\frac{1}{2}$	-	1	0
$SL(2) \times \mathbb{R}^+$	$\frac{1}{2}$	$v v_\alpha = 0$	$\frac{\mathbb{R}^* \times SL(2, \mathbb{R})}{SL(2, \mathbb{R})}$	1
	$\frac{1}{4}$	$v v_\alpha \neq 0$	$\mathbb{R}^* \times \frac{SL(2, \mathbb{R})}{SO(2, \mathbb{R})}$	3
$SL(3) \times SL(2)$	$\frac{1}{2}$	$\epsilon^{ab} v_{ia} v_{jb} = 0$	$\frac{SL(3, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})}{(\mathbb{R}^+ \times SL(2, \mathbb{R})) \ltimes \mathbb{R}^3}$	5
	$\frac{1}{4}$	$\epsilon^{ab} v_{ia} v_{jb} \neq 0$	$\frac{SL(3, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})}{SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2}$	6
$SL(5)$	$\frac{1}{2}$	$\epsilon^{ijklm} v_{ij} v_{kl} = 0$	$\frac{SL(5, \mathbb{R})}{(SL(3, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})) \ltimes \mathbb{R}^6}$	7
	$\frac{1}{4}$	$\epsilon^{ijklm} v_{ij} v_{kl} \neq 0$	$\frac{SL(5, \mathbb{R})}{O(2, 3) \ltimes \mathbb{R}^4}$	10
$SO(5, 5)$	$\frac{1}{2}$	$(S \Gamma^m S) = 0$	$\frac{SO(5, 5, \mathbb{R})}{SL(5, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{10}}$	11
	$\frac{1}{4}$	$(S \Gamma^m S) \neq 0$	$\frac{SO(5, 5, \mathbb{R})}{O(3, 4) \ltimes \mathbb{R}^8}$	16

$M_{\alpha_{d+1}} = E_d$	BPS	BPS condition	Orbit	Dim.
E_6	$\frac{1}{2}$	$I_3 = \frac{\partial I_3}{\partial q^i} = 0,$ and $\frac{\partial^2 I_3}{\partial q^i \partial q^j} \neq 0.$	$\frac{E_6}{O(5,5) \ltimes \mathbb{R}^{16}}$	17
	$\frac{1}{4}$	$I_3 = 0, \frac{\partial I_3}{\partial q^i} \neq 0$	$\frac{E_6}{O(4,5) \ltimes \mathbb{R}^{16}}$	26
	$\frac{1}{8}$	$I_3 \neq 0$	$\mathbb{R}^* \times \frac{E_6}{F_{4(4)}}$	27
E_7	$\frac{1}{2}$	$I_4 = \frac{\partial I_4}{\partial q^i} = \frac{\partial^2 I_4}{\partial q^i \partial q^j} \Big _{\text{Adj}_{E_7}} = 0,$ and $\frac{\partial^3 I_4}{\partial q^i \partial q^j \partial q^k} \neq 0.$	$\frac{E_7}{E_6 \ltimes \mathbb{R}^{27}}$	28
	$\frac{1}{4}$	$I_4 = \frac{\partial I_4}{\partial q^i} = 0,$ and $\frac{\partial^2 I_4}{\partial q^i \partial q^j} \Big _{\text{Adj}_{E_7}} \neq 0.$	$\frac{E_7}{(O(5,6) \ltimes \mathbb{R}^{32}) \times \mathbb{R}}$	45
	$\frac{1}{8}$	$I_4 = 0, \frac{\partial I_4}{\partial q^i} \neq 0$	$\frac{E_{7(7)}}{F_{4(4)} \ltimes \mathbb{R}^{26}}$	55
	$\frac{1}{8}$	$I_4 > 0$	$\mathbb{R}^+ \times \frac{E_7}{E_{6(2)}}$	56

◀ Return