

Symétries de dualité et formes automorphes en théorie des cordes

Pierre Vanhove

9 Mars 2017

À la mémoire de mon père, Jacques Vanhove

1 Introduction

Aujourd'hui, nous allons parler de la théorie des cordes et de ses implications physiques. Une motivation de cette théorie est de fournir une théorie physique de la gravité quantique tout en unifiant les interactions entre particules élémentaires. Cette analyse physique de la théorie des cordes fait intervenir des objets mathématiques particuliers que l'on appelle des groupes de dualité, connus en mathématiques sous le nom de groupes de Chevalley. Nous verrons plus tard ce que sont ces groupes et comment ils apparaissent en théorie des cordes. Les quantités physiques de la théorie des cordes sont invariantes sous l'action discrète de ces groupes et donnent lieu à des formes modulaires, ou de manière plus générale, lorsque le rang du groupe de dualité est supérieur à 1, à des formes automorphes. Ces dernières sont associées aux séries d'Eisenstein intervenant dans les travaux de Langlands. Cette leçon concerne les relations entre la théorie des représentations automorphes et les propriétés physiques de la théorie des cordes.

D'abord je présenterai—trop brièvement—l'essentiel des notions de théorie des cordes nécessaires à cette leçon. J'expliquerai ensuite comment les groupes de dualité apparaissent dans cette théorie et comment ses contraintes physiques correspondent exactement à la construction mathématique due à Chevalley. La deuxième partie de la leçon consistera à utiliser l'invariance de la théorie des cordes sous l'action des groupes de Chevalley pour montrer que les amplitudes physiques sont données par des formes automorphes dont je donnerai l'interprétation en termes de modes de Fourier. Cette partie sera une lecture de physicien d'objets connus dans la théorie des représentations automorphes. Cette leçon est principalement basée sur mes travaux avec M. Green, J. Russo et S.D. Miller [1, 2, 3, 4, 5]. D'autres références incluent par exemple [6, 7, 8]⁽¹⁾.

Première partie

2 Brève présentation de la théorie des cordes

Nous savons tous ce qu'est un électron. Il tourne autour d'un noyau composé de protons et de neutrons, eux-mêmes composés de quarks. Protons, neutrons et électrons sont des objets que l'on détecte et dont on peut mesurer les diverses caractéristiques physiques dans les accélérateurs

(1). Pour une introduction à la théorie des cordes, nous référons à [9, 10, 11, 12]. (N.d.R)

de particules ou par l'analyse des rayonnements cosmiques. Ce sont des objets physiques dont l'existence est confirmée expérimentalement. Les quarks ne peuvent pas être isolés, mais on peut les observer à l'intérieur d'autres particules comme les protons par exemple. Leurs propriétés physiques peuvent ainsi être testées dans les accélérateurs de particules et ont été validées par l'expérience. La théorie des cordes fait l'hypothèse que ces objets sont le résultat des oscillations de cordes, c'est-à-dire d'objets unidimensionnels, microscopiques. Il faut penser que la relation entre la corde et l'électron ou le quark est similaire à ce qu'un son est à une corde classique : à chaque « note » est associée une particule. Il y aurait donc dans le spectre d'excitation un mode de vibration correspondant à l'électron, à chaque quark etc. Les propriétés des cordes permettent également de modéliser les interactions entre les différentes particules.

Prenons par exemple un électron, et supposons que l'on dispose d'un microscope permettant de voir des objets de la taille des cordes. On verrait alors que l'électron n'est pas ponctuel mais est une petite corde vibrante. Il existe deux types de cordes, les cordes fermées formant une boucle et les cordes ouvertes. Les extrémités de ces cordes ouvertes, comme une corde à sauter, peuvent être attachées à un mur et donc fixées ou bien libres. Les cordes fermées forment un tube en évoluant dans le temps, tandis que les cordes ouvertes forment un ruban.

Sous l'effet des fluctuations quantiques, la corde peut se briser en deux, et à l'inverse, deux cordes peuvent fusionner pour n'en former plus qu'une. Lors de son évolution temporelle, la corde engendre donc une surface Σ comportant des anses et des bords. Ces trous correspondent à la façon dont les cordes interagissent entre elles. Par des processus quantiques, la corde est également en interaction avec l'espace-temps à d dimensions, que l'on note $\mathcal{M}^{1,d-1}$ ayant une dimension de temps et $d-1$ dimensions d'espace, dans lequel elle évolue. Par exemple, on peut imaginer une corde classique se déplaçant dans notre espace-temps usuel avec trois dimensions d'espace et une dimension de temps. Mais pour avoir une théorie quantique cohérente, c'est-à-dire qui respecte les symétries fondamentales d'une théorie quantique que sont l'unitarité et l'invariance sous transformation de Lorentz⁽²⁾, on est obligé de considérer un espace qui comporte une dimension temporelle et neuf dimensions spatiales. On a donc un plongement X^μ ($\mu \in \{0, 1, \dots, 9\}$) de la surface Σ de coordonnées (τ, σ) dans l'espace $\mathcal{M}^{1,9}$:

$$\begin{aligned} \Sigma &\rightarrow \mathcal{M}^{1,9} \\ (\tau, \sigma) &\mapsto X^\mu(\tau, \sigma), \end{aligned} \tag{2.1}$$

La coordonnée X^0 est associée à la dimension temporelle de $\mathcal{M}^{1,9}$ et les autres coordonnées aux dimensions spatiales. Toutefois nous n'avons pas encore donné de dynamique à cet objet.

La formulation quantique de cette théorie, c'est-à-dire la manière de quantifier en respectant les contraintes physiques, restreint le nombre de théories possibles. Il existe cinq théories de cordes cohérentes dans leur formulation quantique :

1. Cordes ouvertes et fermées de type I avec groupe de jauge $SO(32)$
2. Corde fermées dites hétérotiques avec groupe de jauge $SO(32)$
3. Corde fermées dites hétérotiques avec groupe de jauge $E_8 \times E_8$
4. Cordes fermées de type IIA
5. Cordes fermées de type IIB

(2). L'unitarité est liée à la conservation des probabilités au cours du temps en mécanique quantique. Les transformations de Lorentz décrivent les changements de référentiels en relativité restreinte. (N.d.R)

J'expliquerai dans la suite à quoi correspondent les différents types de cordes ainsi que leur groupe de jauge associé. On peut déjà voir qu'on a seulement deux types de cordes fermées possibles sans groupe de jauge, de type IIA ou IIB, le cas des cordes fermées hétérotiques étant un peu différent. Les algèbres de courants⁽³⁾ des cordes fermées ne peuvent être données que par les groupes de jauge $SO(32)$ ou $E_8 \times E_8$. Et pour les cordes ouvertes, les degrés de liberté de jauge ne peuvent être donnés que par le groupe de jauge $SO(32)$. La quantification de la théorie des cordes donne cinq théories, mais il n'y a pas a priori de manière de privilégier une théorie sur les autres.

L'action⁽⁴⁾ de la corde sur la variété pseudo-riemannienne $\mathcal{M}^{1,9}$ est donnée par⁽⁵⁾

$$S_{\text{grav}} = -\frac{T_F}{2} \int_{\Sigma} d^2\xi \sqrt{h} (h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \mathcal{G}_{\mu\nu}(X) + \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \mathcal{B}_{\mu\nu}(X)) + \int_{\Sigma} d^2\xi \Phi(X) \mathcal{R}^{(2)}(h), \quad (2.2)$$

où :

$\mathcal{G}_{\mu\nu}$ est la métrique de Riemann de $\mathcal{M}^{1,9}$,

$\mathcal{B}_{\mu\nu}$ est un champ antisymétrique,

Φ est un champ scalaire appelé dilaton,

h^{ab} est la métrique de la surface Σ . Son déterminant est h et sa courbure de Ricci $\mathcal{R}^{(2)}(h)$

T_F est une constante représentant la tension de la corde, liée à son énergie.

Les grandeurs $\mathcal{G}_{\mu\nu}$, $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ et Φ caractérisent la géométrie de l'espace-temps où évolue la corde.

Supposons que l'on ait des cordes décrivant des quarks. Ces quarks sont sensibles à des champs extérieurs, par exemple au champ de l'interaction forte qui explique pourquoi et comment le proton est formé de quarks. Ce champ de jauge, caractérisé par un potentiel vecteur $\mathcal{A}_\mu^{(i)}$, se couple à la théorie des cordes par le bord de la surface Σ :

$$S_{\text{jauge}}^{\text{type I}} = \sum_i q_i \oint_{\partial\Sigma} \mathcal{A}_\mu^{(i)}(X) \vec{n} \cdot \partial X^\mu, \quad (2.3)$$

où q_i décrivent les différentes charges du champ de jauge $\mathcal{A}_\mu^{(i)}(X)$ et \vec{n} est un vecteur normal à Σ en tout point de son bord $\partial\Sigma$. Cette action décrit le couplage des champs de jauge à la matière pour des groupes non abéliens, par exemple dans le cadre de la chromodynamique quantique⁽⁶⁾.

Dans la théorie des cordes hétérotiques, les cordes sont sensibles aux champs de l'espace-temps par une algèbre de courant sur la surface Σ :

$$S_{\text{jauge}}^{\text{het}} = -\frac{T_F}{2} \int_{\Sigma} d^2\xi \sqrt{h} (h^{ab} \partial_a X^I \partial_b X^J \delta_{IJ} + \epsilon^{ab} \mathcal{A}_\mu^{(I)} \partial_a X^\mu \partial_b X^J \delta_{IJ}), \quad (2.4)$$

où

(3). L'algèbre de courant décrit comment les différentes quantités conservées d'un système quantique commutent entre elles. (N.d.R)

(4). L'action est une grandeur décrivant la dynamique d'un système (ici de cordes). (N.d.R)

(5). Dans la suite du texte, la convention d'Einstein est utilisée : une sommation est effectuée sur les indices répétés. Par exemple, le produit scalaire entre deux vecteurs v et w s'écrit $\langle w|v \rangle = w^i v_i$. (N.d.R)

(6). La chromodynamique quantique est la théorie physique décrivant les interactions entre les quarks. Le groupe de jauge de cette théorie est $SU(3)$. (N.d.R.)

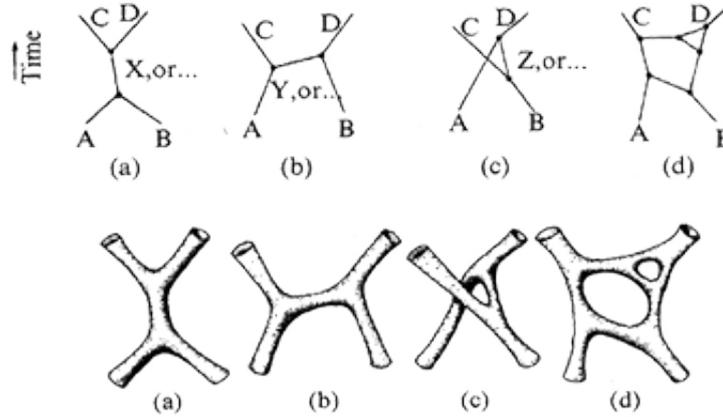


FIGURE 1 – En haut, diagrammes de la théorie des champs usuels. En bas, les mêmes diagrammes du point de vue de théorie des corde. Figure tirée de [9].

δ_{IJ} est la métrique de Cartan du groupe de jauge,
 $\mathcal{A}_\mu^{(I)}$ sont les champs de jauge.

La théorie quantique nous dit qu'il faut sommer sur toutes les fluctuations possibles de la corde, c'est-à-dire sur toutes les surfaces possibles. L'action de la théorie effective (i.e. dans l'espace-temps $\mathcal{M}^{1,9}$) est donnée par un développement selon le genre g de la surface Σ :

$$S_{\text{eff}}^{(D)}(g_{\mu,\nu}, \mathcal{A}_\mu^i, \psi, \dots) = \sum_{\Sigma_g} e^{-\Phi\chi(\Sigma_g)} \int_{M(\Sigma_g)} \int d\psi dX \dots e^{\int d^2z \mathcal{L}_{2d}(\psi, X, \dots, g_{\mu\nu}, \mathcal{A}_\mu^i, \dots)}, \quad (2.5)$$

où

$M(\Sigma_g)$ est l'espace de modules des surfaces de genre g ⁽⁷⁾,

$\chi(\Sigma_g)$ est la caractéristique d'Euler de la surface Σ_g ,

ψ , X , etc. sont les champs de la théorie dont la dynamique est décrite par le lagrangien \mathcal{L}_{2d} .

On a donc un développement perturbatif selon une constante de couplage $g_s = e^{\langle\Phi\rangle}$, contrôlé par la valeur moyenne du dilaton, et dont le poids est donné par $\chi(\Sigma_g)$. Plus la surface Σ_g a des anses et des bords, i.e. un genre plus élevé, plus sa contribution à (2.5) sera faible. De plus, à basse énergie par rapport à l'échelle d'énergie de la théorie des cordes, quand on intègre les fluctuations microscopiques des cordes, on doit retrouver nos théories physiques usuelles : relativité générale, théorie de jauge etc. Cela n'est pas une prédiction de la théorie des cordes mais une manière de s'assurer que notre théorie donne une description du monde tel qu'on le connaît et qu'on le comprend. Les corrections dues à la théorie des cordes, c'est-à-dire le fait que les constituants fondamentaux ne sont pas des objets ponctuels mais étendus, interviennent seulement dans les termes correctifs d'ordres supérieurs en l'échelle caractéristique des cordes déterminée par la tension T_F dans (2.2).

En théorie des champs usuels, les diagrammes de théories de champs sont décrits par des graphes. Par exemple les diagrammes en arbre (a), (b), (c) de la rangée supérieure de la figure 1

(7). C'est un espace dont les points paramètrent les différentes surfaces de genre g à automorphisme de la surface près. (N.d.R)

peuvent décrire un échange de photons entre un électron et un autre électron ou un positron. Le diagramme (d) de la rangée supérieure est différent puisqu'il possède des boucles (ici deux). Bien que les particules entrent et sortent du diagramme comme auparavant, les interactions ayant lieu à l'intérieur ne sont pas les mêmes. Pour chacun de ces diagrammes, il existe un diagramme analogue en théorie des cordes, donnés sur la rangée inférieure de la figure 1, où ce n'est plus un objet ponctuel qui se propage en formant une ligne, mais une corde qui forme donc un tube en se propageant. Les diagrammes (a) , (b) , (c) ne sont pas identiques du point de vue de la théorie des champs puisque par exemple, le point A n'est pas connecté aux mêmes points dans les trois diagrammes. Mais en théorie des cordes, ces trois diagrammes sont les mêmes puisqu'il existe une déformation continue de l'un vers les autres : comme on travaille avec des surfaces, les diagrammes peuvent être vus comme étant complètement élastiques. Les trois graphes (a) , (b) , (c) de la deuxième ligne correspondent tous les trois à une sphère avec quatre points marqués. Ainsi, à la somme de trois graphes en théorie des champs correspond un seul graphe en théorie des cordes. Lorsque l'on se place dans la limite où la taille de la corde est négligeable, il va falloir prendre en compte la position des points sur la sphère, et selon leurs positions on obtiendra un des trois diagrammes de la théorie des champs. De manière un peu plus formelle, ces trois graphes de Feynman viennent du bord de la dégénération de la sphère avec quatre points marqués. De même, le diagramme (d) de la théorie des champs est obtenu depuis un tore à deux trous (une sphère à deux anses) avec quatre points marqués en théorie des cordes. Et de manière générale, à un diagramme en théorie des cordes correspondent plusieurs diagrammes en théorie des champs.

La théorie des cordes a l'ambition de reproduire la physique des particules, plus précisément le modèle standard, testée dans les accélérateurs de particules, par exemple au LHC au CERN, et la relativité générale, testée par exemple par l'observation des ondes gravitationnelles émises par deux trous noirs, tout en apportant des corrections liées au caractère non ponctuel de ces objets. Il est important de garder à l'esprit que la théorie des cordes prédit deux choses. Tout d'abord, elle prédit des modifications à la théorie de la relativité générale d'Einstein. Cette théorie décrit les déformations de l'espace-temps en présence de masse. Imaginez un coussin sur lequel on poserait une boule lourde : la surface du coussin est déformée par la présence de la boule. Une bille légère roulera alors le long de la ligne de plus grande pente jusqu'à tomber sur la boule. Si maintenant on ne considère plus une bille mais un petit élastique, son évolution sur le coussin sera différente de celle de la bille : il va glisser en se déformant (en négligeant les frottements). Imaginez maintenant que le puits formé par la boule soit très profond, de sorte à atteindre une configuration ressemblant à un trou noir. Là où la bille peut tomber arbitrairement profondément dans le puits, la corde ne le peut pas. En effet, comme la corde a une extension spatiale, il arrive un moment où le goulot du puits est plus petit que la taille de la corde, et elle ne peut donc plus tomber. Ainsi, la géométrie de l'espace-temps de la théorie d'Einstein serait modifiée par la théorie des cordes de sorte à ce que la théorie soit insensible aux détails de l'espace-temps d'une échelle plus petite que la taille de la corde. De manière similaire pour la physique des particules, la théorie des cordes induit des modifications sur les interactions entre particules à très courte distance, c'est-à-dire à très haute énergie. L'échelle caractéristique des phénomènes de corde est donné par la tension de la corde T_F , une énergie par unité de longueur, qui donne l'énergie des vibrations de la corde. Grâce aux contraintes physiques, on sait que cette énergie doit être inférieure à une borne donnée par la masse de Planck M_{Planck} :

$$T_F = \frac{1}{2\pi\alpha'} \leq M_{\text{Planck}}^2 = (10^{18}\text{GeV})^2. \quad (2.6)$$

A priori, la tension de la corde pourrait être bien plus faible que M_{Planck}^2 . Si jamais on vous dit un jour que l'on a découvert des corrections de la théorie des cordes, cela signifie que l'on aurait vu à une certaine échelle d'énergie des effets de la vibration des cordes. Jusqu'à présent, nous n'avons pas encore eu accès à des prédictions physiques ou de confirmations expérimentales de la théorie des cordes.

3 Groupes et algèbres de Lie complexes

Les groupes de Lie apparaissent naturellement dans les théories physiques comme groupe de symétrie de la théorie. Par exemple, les lois de la mécanique classique sont invariantes sous rotation de l'espace, autrement dit sous l'action d'un élément de $SO(3)$. Il en va de même dans d'autres cas plus compliqués, comme la conservation des probabilités en mécanique quantique, liée à une symétrie sous l'action d'un groupe unitaire $U(N)$, ou dans le cadre qui nous intéresse ici : celui de la théorie des cordes. Nous donnons dans cette partie les bases essentielles de la classification des algèbres de Lie complexes pour construire les groupes de Chevalley.

3.1 Quelques définitions

Un groupe de Lie G est une variété différentielle munie de deux applications lisses

$$(g, h) \rightarrow gh \quad g \rightarrow g^{-1} \quad \forall g, h \in G \quad (3.1)$$

lui donnant une structure de groupe. Les groupes de Lie les plus communs sont les groupes matriciels comme $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales pour le produit scalaire euclidien ou $SL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de déterminant 1 où dans les deux cas n représente la taille des matrices.

D'une part, comme G est une variété différentielle, l'espace tangent en un point $T_g G$ contient l'information sur le groupe dans un voisinage de g . D'autre part, comme G est un groupe, l'action du groupe par multiplication à gauche L (resp à droite R) permet de transporter un vecteur tangent $X_g \in T_g G$ en un autre point g' de G . En posant $h = g'g^{-1}$ on définit

$$X_{g'} = (dL_h)_g(X_g) \in T_{g'} G \quad (3.2)$$

Un champ de vecteur X sur G est dit invariant à gauche si pour tout $g, h \in G$ on a :

$$(dL_g)_h(X_h) = X_{gh} \quad (3.3)$$

On a donc une bijection entre les champs de vecteur invariants à gauche et l'espace tangent en l'identité $T_e G$. Étant donné deux éléments X_e, Y_e de l'espace tangent en l'identité $T_e G$, il est donc possible de leur associer deux champs vectoriel sur G que l'on note respectivement X et Y .

Avec un champ de vecteur X et une fonction f d'une variété M dans \mathbb{C} ou \mathbb{R} , une opération naturelle consiste à dériver f en chaque point selon la direction donnée par X . Cette opération est appelée la dérivée de Lie de X et est notée \mathcal{L}_X . L'application $\mathcal{L}_X(f)$ va de M dans l'espace tangent TM :

$$\mathcal{L}_X(f)(x) = \sum_{\alpha} X^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} \Big|_x \quad (3.4)$$

où x^{α} sont des coordonnées locales sur M . Cette notion s'étend aux champs de vecteurs de la manière suivante. Pour deux champs de vecteurs, on définit la dérivée de Lie de X sur Y comme

$$\mathcal{L}_X Y(f)(x) = \sum_{\alpha, \beta} \left(X^{\alpha} \frac{\partial Y^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial x^{\beta}} - Y^{\alpha} \frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial x^{\beta}} \right) \Big|_x \quad \forall f \in \mathcal{C}^{\infty}(G), x \in G \quad (3.5)$$

On peut vérifier que cette opération ne dépend pas du choix de coordonnées sur M . De plus, elle peut s'interpréter comme la dérivée de Lie selon un nouveau champ de vecteur noté $[X, Y]$ que l'on appelle le crochet de Lie de X et de Y . Dans la base de coordonnées locales $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \right\}$, ce champ de vecteur a pour coordonnées

$$[X, Y]^{\beta} = \sum_{\alpha} \left(X^{\alpha} \frac{\partial Y^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - Y^{\alpha} \frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \right) \quad (3.6)$$

Le crochet de Lie de deux champs vectoriels $[X, Y]$ est bilinéaire, antisymétrique et vérifie l'identité de Jacobi, c'est-à-dire qu'étant donné trois champs vectoriels X, Y et Z , on a :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0. \quad (3.7)$$

Revenons maintenant au cas des groupes de Lie. On peut utiliser la construction ci-dessus pour définir un crochet de Lie sur l'espace tangent $T_e G$: on définit leur crochet de Lie $[X_e, Y_e]$ comme le commutateur des deux champs vectoriels invariants à gauche associés à X_e et Y_e , évalué en l'identité. On peut vérifier que le champ vectoriel ainsi obtenu est bien invariant à gauche, et donc qu'il est bien caractérisé par sa valeur en l'identité, ce qui assure que notre crochet $[X_e, Y_e]$ est bien défini sur $T_e G$.⁽⁸⁾

Un espace vectoriel muni d'une opération antisymétrique satisfaisant l'identité de Jacobi est une algèbre de Lie. L'espace tangent $T_e G$ muni de son crochet de Lie forme donc l'algèbre de Lie \mathfrak{g} associée à G . De plus, il existe certaines conditions suffisantes où \mathfrak{g} encode l'information sur l'ensemble du groupe, par exemple lorsque G est connexe et compact. L'avantage est que là où G est un objet géométrique sophistiqué, \mathfrak{g} est une structure linéaire qui est souvent plus facile à étudier. Dans le reste de cette section et la suivante, nous nous focaliserons sur l'étude des algèbres de Lie sur le corps \mathbb{C} .

Un sous-espace vectoriel \mathfrak{h} de \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} si pour tout $X, Y \in \mathfrak{h}$, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$. Les sous-algèbres de Lie sont associées aux sous-groupes connexes de G . En particulier, une algèbre de Lie est dite abélienne si son crochet de Lie est nul. On appelle \mathfrak{h} un idéal de \mathfrak{g} si pour $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}, [X, Y] \in \mathfrak{h}$, qui est une condition plus générale. La notion d'idéal est utile à la classification des algèbres de Lie. Une algèbre de Lie non-abélienne qui n'a pas d'idéaux non-triviaux, c'est-à-dire différent de l'idéal nul ou de \mathfrak{g} , est dite simple, et une

(8). Pour les groupes de Lie, une autre manière d'introduire le crochet de Lie est de l'introduire comme l'application différentielle de l'action adjointe du groupe sur lui-même $Ad_g : h \rightarrow ghg^{-1}$.

algèbre de Lie pouvant s'écrire comme une somme directe d'algèbres de Lie simples est dite semi-simple. Enfin, une algèbre de Lie est dite résoluble si la série d'algèbres suivante, appelée série dérivée

$$\mathfrak{g} > \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] > \dots > \mathfrak{g}_n = [\mathfrak{g}_{n-1}, \mathfrak{g}_{n-1}] > \dots \quad (3.8)$$

termine sur l'algèbre nulle.

Cette notion n'interviendra pas dans le reste de ce texte, mais elle est en quelque sorte complémentaire de celle d'algèbre de Lie semi-simple. En effet, pour une algèbre de Lie \mathfrak{g} semi-simple, la série dérivée est toujours égale à \mathfrak{g} . Il existe ainsi une décomposition dite de Lévi permettant d'écrire toute algèbre de Lie comme produit semi-direct d'une algèbre résoluble et d'une algèbre semi-simple. Comme la partie résoluble est caractérisé par sa série dérivée, il reste à comprendre les propriétés des algèbres semi-simples. Dans la suite, nous considérerons donc uniquement des algèbres de Lie semi-simples.

3.2 Classification des algèbres de Lie complexe semi-simple

Considérons une algèbre de Lie complexe semi-simple \mathfrak{g} de dimension finie. L'algèbre de Lie \mathfrak{g} agit sur elle-même par son crochet de Lie, aussi appelé action adjointe :

$$\text{ad}(X)(Y) = [X, Y] \quad X, Y \in \mathfrak{g} \quad (3.9)$$

Une algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Lie telle que :

- \mathfrak{h} est abélienne, c'est à dire $[H, H'] = 0$ pour tout $H, H' \in \mathfrak{h}$.
- Pour tout $H \in \mathfrak{h}$, $\text{ad}(H)$ est diagonalisable dans \mathfrak{g} .
- Il n'existe pas de sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} contenant \mathfrak{h} strictement et satisfaisant les deux propriétés précédentes.

Différentes algèbres de Cartan d'une même algèbre de Lie sont reliés par conjugaison, elles sont donc toutes isomorphes. On note $(H_i)_i$ une base de \mathfrak{h} . Puisque \mathfrak{h} est abélienne, on a $[\text{ad}(H_i), \text{ad}(H_j)] = 0$, donc ces endomorphismes sont diagonalisables simultanément. Une forme linéaire $\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ est une racine de \mathfrak{g} par rapport à \mathfrak{h} si α est non-nulle et si il existe $X \neq 0 \in \mathfrak{g}$ tel que $\text{ad}(H)(X) = \alpha(H)X$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$. L'ensemble des éléments de \mathfrak{g} non-nul et tel que $[H, X] = \alpha(H)X$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$ est noté \mathfrak{g}_α . Il est possible de montrer que pour toute racine $\alpha \in R$, \mathfrak{g}_α est un espace vectoriel de dimension 1. En notant R l'ensemble des racines de \mathfrak{g} , on a alors

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha \quad (3.10)$$

Il est donc possible d'étudier \mathfrak{g} comme l'ensemble des espaces propres pour l'action adjointe de H . De plus, il est possible de montrer que R possède une structure très spécifique que l'on appelle un système de racines (dans un espace vectoriel euclidien E muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Un système de racines est caractérisé par les propriétés suivantes :

- $\text{Vect}(R)$ engendre E .
- Pour $\alpha \in R$, les seuls multiples de α dans R sont $\pm\alpha$.
- R est invariant sous réflexion par un hyperplan perpendiculaire à une racine α . Autrement dit, si $\alpha, \beta \in R$ alors $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \in R$.
- Pour $\alpha, \beta \in R$, $2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ est un entier.

Le système de racine R d'une algèbre de Lie complexe semi-simple la caractérise complètement. Toutefois, il est possible de tirer profit des deux dernières propriétés du système de racines pour encoder toutes les informations nécessaires à sa reconstruction dans une structure encore plus simple appelée *système de racines*. En effet, la troisième propriété nous donne tous les hyperplans qui sont des symétries de R tandis que la dernière propriété conditionne l'angle et le rapport des longueurs de deux racines α, β car

$$4 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle} = (2 \cos(\theta))^2 \in \mathbb{Z} \quad (3.11)$$

où θ est l'angle entre les deux racines. On a donc seulement quatre possibilités pour θ :

- $\theta = \frac{\pm\pi}{2}$ alors les longueurs de α et β sont indépendantes.
- $\theta = \frac{\pm\pi}{3}$ alors α et β ont la même longueur.
- $\theta = \frac{\pm\pi}{4}$ alors le ratio des longueurs est de $\sqrt{2}$.
- $\theta = \frac{\pm\pi}{6}$ alors le ratio des longueurs est de $\sqrt{3}$.

Une base de R est un ensemble de racines Δ tel que Δ est une base de E et chaque racine de R décomposée dans la base Δ s'écrit avec des coefficients entiers de même signe. Pour un système de racines R ayant pour base Δ , on construit le digramme de Dynkin associé de la manière suivante :

- Les sommets du diagrammes correspondent aux éléments de Δ
- Deux sommets α, β sont reliés par e arêtes où

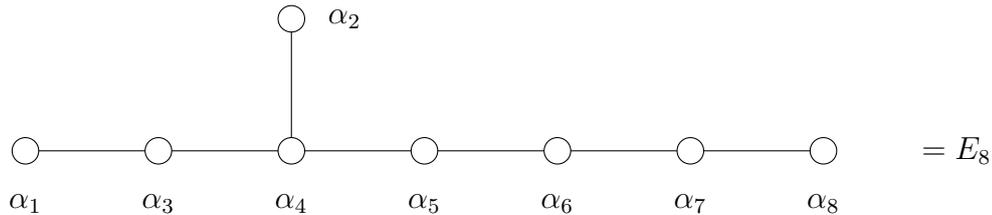
$$e = \max \left(\left| 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \right|, \left| 2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \right| \right) \quad (3.12)$$

De plus si α et β ne sont pas de même norme, alors on oriente les arêtes vers la racine de plus grande norme.

Pour retrouver le système de racines à partir de Δ , il suffit d'appliquer les réflexions par les hyperplans orthogonaux aux éléments de Δ , et d'ajouter tous les vecteurs à R tous les éléments n'étant pas dans Δ , leur norme étant fixée par leur angles avec les différents éléments de Δ . On itère ce procédé jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de nouveaux éléments à rajouter. Les diagrammes de Dynkin permettent donc d'encoder simplement la structure du système de racines, et donc de l'algèbre de Lie associée. Comme ils héritent des contraintes issues des systèmes de racines, la structure des diagrammes de Dynkin est également très contrainte, et il est facile de tous les classifier. On peut donc inverser la procédure, et étant donné un diagramme de Dynkin, se demander quelle est l'algèbre de Lie qui lui est associée. Cela permet notamment de construire les cinq algèbres de Lie complexes simples dites exceptionnelles G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 . Par exemple, le diagramme de Dynkin associé à l'algèbre E_8 est représenté sur la figure 2.

3.3 Groupes de Chevalley

A partir des diagrammes de Dynkin pour les algèbres de Lie semi-simples complexes, il est possible de construire des analogues des groupes de Lie sur d'autres corps que \mathbb{C} . Pour cela, il convient de normaliser la base du système de racines de sorte à ce que les constantes de structure, c'est à dire les coefficients du crochet de Lie de R avec \mathfrak{h} et entre les éléments de la base de R soient des entiers. Cette base est appelée la base de Chevalley, on la notera ici \mathcal{C} . Comme les constantes de structure sont entières, l'anneau $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ des éléments engendrés par \mathcal{C} à

FIGURE 2 – Diagramme de Dynkin associé au groupe E_8

coefficients dans \mathbb{Z} est bien défini. On peut ensuite construire une algèbre de Lie sur n'importe quel corps \mathbb{K} comme $\mathcal{C}_{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \otimes \mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ équipé du crochet de Lie venant de \mathfrak{g} :

$$[1_{\mathbb{K}} \otimes x, 1_{\mathbb{K}} \otimes y] = 1_{\mathbb{K}} \otimes [x, y] \quad (3.13)$$

On obtient ainsi une algèbre de Lie dont les constantes de structures prennent leur valeur dans le corps \mathbb{K} et dont le crochet est celui de l'algèbre \mathfrak{g} de départ. Pour chaque $t \in \mathbb{K}$ et chaque élément α de la base de Chevalley, on définit $e_{\alpha}(t) = \exp(t \text{ad}(e))$, qui est un automorphisme de $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$. L'ensemble des automorphismes $\{e_{\alpha}(t)\}$ forme un sous-groupe des automorphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$, qui est le groupe de Chevalley $G(\mathfrak{g}, \mathbb{K})$, qui est unique à isomorphisme près. Si le groupe est construit à partir de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} d'un groupe de Lie G sur le corps \mathbb{K} , on le note plus rapidement $G(\mathbb{K})$.

La motivation initiale de Chevalley était de définir des analogues des groupes de Lie sur des corps discrets, mais la construction est valable pour tout corps. Dans le cadre de cette leçon, les cas qui nous intéresseront sont ceux des corps \mathbb{R} et \mathbb{Z} .

4 Symétries de dualité

Revenons maintenant à nos théories physiques. Dans cette partie, on supposera que notre espace-temps est plus simple que dans la partie précédente. On se place sur un espace ayant une dimension temporelle, huit dimensions spatiales euclidiennes et une dimension enroulée sur un cercle de rayon R . C'est-à-dire :

$$\mathcal{M}^{1,9} = \mathbb{R}^{1,8} \times S^1. \quad (4.1)$$

Dans cet espace, l'action de la corde—sans champ $\mathcal{B}_{\mu\nu}$, ni dilaton Φ pour simplifier—est donnée par

$$S_{\text{grav}} = -\frac{T_F}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{h} h^{ab} \partial_a X^{\mu}(\tau, \sigma) \partial_b X^{\nu}(\tau, \sigma) \mathcal{G}_{\mu\nu}(X) d\tau d\sigma. \quad (4.2)$$

L'évolution de la corde implique que les coordonnées de plongement $X^{\mu}(\tau, \sigma)$ sont des fonctions harmoniques sur la surface d'univers Σ , c'est-à-dire qu'elles satisfont l'équation

$$h^{ab} \partial_a \partial_b X^{\mu}(\tau, \sigma) = (\partial_{\tau}^2 + \partial_{\sigma}^2) X^{\mu}(\tau, \sigma) = 0. \quad (4.3)$$

Cette équation admet pour solution classique

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = x^{\mu} + x_{\tau}^{\mu} \tau + x_{\sigma}^{\mu} \sigma + \text{oscillateurs}. \quad (4.4)$$

Dans la suite de cette partie, je m'intéresserai à la partie linéaire de ces solutions, on pourra donc négliger le dernier terme de l'équation (4.4).

4.1 La dualité T

Prenons la coordonnée X^9 associée à un cercle S^1 de rayon R et résolvons l'équation (4.4). En faisant un tour de la corde, c'est-à-dire en translatant la coordonnée σ de la corde de 2π , on peut avoir fait plusieurs fois le tour de notre cercle de rayon R :

$$X^9(\tau, \sigma + 2\pi) = X^9(\tau, \sigma) + 2\pi R m \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

On a une relation similaire par translation temporelle, liée à la quantification de l'impulsion :

$$X^9(\tau + 2\pi, \sigma) = X^9(\tau, \sigma) + 2\pi\alpha' \frac{n}{R} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.6)$$

Les entiers m, n comptent le nombre d'enroulement de la corde sur le cercle. Le développement en modes de la corde sur cette coordonnée prend donc la forme suivante :

$$X^9(\tau, \sigma) = x^9 + \alpha' \frac{n}{R} \tau + R m \sigma + \text{oscillateurs} \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (4.7)$$

L'équation (4.7) retranscrit le fait que l'espace-temps n'est pas trivial. On a un seul paramètre α' décrivant la tension de la corde (2.6), mais la géométrie de l'espace-temps donne également des paramètres physiques. Ainsi à partir de ces deux types de paramètres, on peut avoir l'espoir de pouvoir reproduire la masse d'un électron, voire toutes les masses qui apparaissent en physique des particules. À partir de cette expression, on peut calculer la masse d'une corde enroulée :

$$\alpha' M^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{\alpha'}}{R} n \right)^2 + \left(m \frac{R}{\sqrt{\alpha'}} \right)^2 \right] + \text{oscillateurs}. \quad (4.8)$$

L'équation (4.8) est invariante sous l'action de \mathbb{Z}^2 donnée par :

$$R \leftrightarrow \frac{\alpha'}{R}; \quad (m, n) \leftrightarrow (n, m). \quad (4.9)$$

Cette symétrie est illustrée sur la figure 3. Le spectre d'une théorie des cordes sur un cercle de rayon R est identique au spectre d'une théorie des cordes sur un cercle de rayon $\frac{\alpha'}{R}$ où l'on a inversé le rôle de m et de n .

C'est un premier résultat qui est absent dans les théories physiques décrivant seulement des particules ponctuelles. Dans la théorie des cordes, avoir une dimension spatiale décrivant un cercle de grand rayon ou un cercle de petit rayon est identique⁽⁹⁾. On a un rayon minimum obtenu pour $R_{\min} = \sqrt{\alpha'}$, où on a alors $\frac{\sqrt{\alpha'}}{R} = \frac{R}{\sqrt{\alpha'}}$. Ce résultat peut s'interpréter comme le fait qu'il n'est pas possible de comprimer la théorie des cordes dans un espace-temps ayant une dimension plus petite que $\sqrt{\alpha'}$. Cette symétrie est appelée la dualité T pour « dualité torique » ou « dualité de l'espace-cible » (« target space duality » en anglais), elle traduit le fait qu'en théorie des cordes grandes et petites dimensions sont équivalentes. Dans le cas où l'on n'a plus un unique cercle, mais un tore à d dimensions, la théorie devient invariante sous l'action du groupe discret $SO(d, d; \mathbb{Z})$. La masse de la corde est alors donnée par

$$\alpha' M^2 = \frac{1}{2} \vec{n}^T \begin{pmatrix} G - BG^{-1}B & BG^{-1} \\ -G^{-1}B & G^{-1} \end{pmatrix} \vec{m} + \text{oscillateurs}; \quad (\vec{n}, \vec{m}) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d, \quad (4.10)$$

(9). Cette symétrie concerne toutes les grandeurs physiques de la théorie et pas seulement son spectre de masse. (N.d.R.)

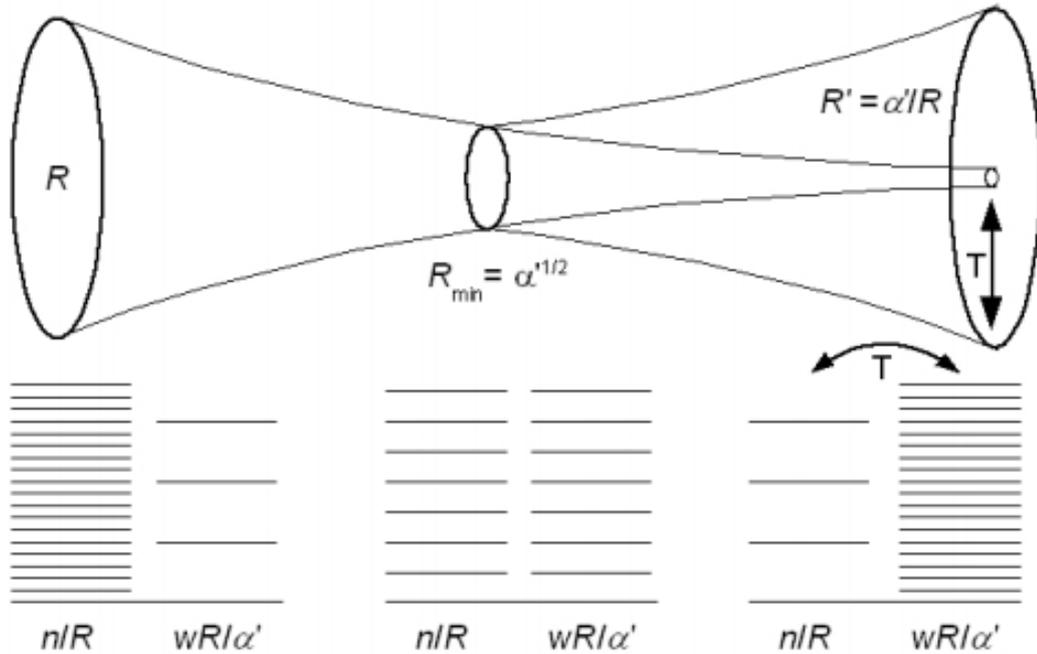


FIGURE 3 – Illustration de la dualité T de la théorie des cordes.

où B et G sont des matrices décrivant la géométrie du tore.

Si on a une particule ponctuelle, cette particule va être invariante sous l'action d'un certain groupe, par exemple le groupe des rotations $SO(3)$ de l'espace à trois dimensions. Dans le cas d'une corde, ce groupe agit à la fois sur les modes d'enroulement et d'impulsion. Au lieu d'avoir deux groupes distincts qui donneraient un produit de groupe de symétrie $SO(3) \times SO(3)$, on a un unique groupe $SO(3,3)$. Ce groupe est le groupe préservant le produit scalaire associé à la métrique $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, -1, -1, -1)$.

4.2 La dualité S

La théorie des cordes possède une autre symétrie appelée dualité S . L'action de la théorie des cordes (2.2) fait intervenir un champ scalaire Φ appelé dilaton. Considérons un système gravitationnel faisant intervenir un autre champ scalaire $C^{(0)}$ et dont l'action classique est donnée par :

$$\mathcal{S}_{2b} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{\mathcal{G}} \left(\mathcal{R} - \frac{1}{2} \partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi - \frac{1}{2} e^{2\Phi} \partial^\mu C^{(0)} \partial_\mu C^{(0)} \right), \quad (4.11)$$

où \mathcal{R} est la courbure de Ricci pour la métrique $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ de l'espace-temps et κ_{10} est la constante du couplage gravitationnel.

Les différentes valeurs des champs scalaires Φ et $C^{(0)}$ paramètrent les différentes configurations de la théorie dans un espace-temps euclidien à dix dimensions. En introduisant $\Omega = C^{(0)} + ie^{-\Phi}$, l'action classique peut se réécrire sous la forme :

$$\mathcal{S}_{2b} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{\mathcal{G}} \left(\mathcal{R} - \frac{1}{2} \frac{\partial_\mu \Omega \partial^\mu \bar{\Omega}}{\mathcal{I}m(\Omega)^2} \right). \quad (4.12)$$

Alors on peut voir que l'action (4.12) est invariante sous les transformations de $SL(2, \mathbb{R})$:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} \rightarrow \mathcal{G}_{\mu\nu}, \quad (4.13)$$

$$\Omega \rightarrow \frac{a\Omega + b}{c\Omega + d}; \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}. \quad (4.14)$$

Deux valeurs de Ω reliées par un élément de $SL(2, \mathbb{R})$ donnent des configurations d'espace-temps identiques. Cette théorie est en particulier invariante sous inversion de Ω :

$$e^{-\Phi} = \mathcal{I}m(\Omega) \leftrightarrow e^\Phi = \mathcal{I}m\left(-\frac{1}{\Omega}\right) \Big|_{C^{(0)}=0}. \quad (4.15)$$

Nous avons vu que le développement perturbatif est donné par une série en puissances de $g_s = e^{\langle\Phi\rangle}$ du développement de l'action selon le genre des surfaces (2.5). Cette transformation s'interprète donc comme l'échange du régime de couplage fort $e^{\langle\Phi\rangle} \gg 1$ et du régime de couplage faible $e^{\langle\Phi\rangle} \ll 1$ en théorie des cordes.

Cette symétrie est appelée dualité S ou dualité fort-faible (« strong-weak duality » en anglais). On a considéré ici la théorie classique, laquelle est bien invariante sous $SL(2, \mathbb{R})$, mais la théorie quantique est seulement invariante sous le sous-groupe discret $SL(2, \mathbb{Z})$. De manière générale, une théorie quantique doit être quantifiée. On s'attend donc à ce que les groupes de symétries de la théorie soient des groupes discrets plutôt que des groupes continus. La transformation décrite par la relation (4.15) correspond bien à un élément de $SL(2, \mathbb{Z})$. L'inversion des régimes de couplage fort et faible est donc également une symétrie de la théorie quantique.

4.3 Lien entre les différentes théories de cordes et dualité U

Nous avons vu précédemment qu'il existait cinq théories de cordes différentes. Ces cinq théories sont reliées entre elles grâce à ces dualités. Les deux théories de cordes hétérotiques sont reliées par la dualité T . De même pour les théories de cordes de type IIA et IIB. La dualité S relie la théorie des cordes hétérotiques avec groupe de jauge $SO(32)$ avec la théorie des cordes de type I, tandis que la théorie des cordes de type IIB, qui est celle que l'on a utilisée comme exemple ici, est auto-invariante sous cette dualité. Ces différents liens sont récapitulés dans la figure 4.

En omettant le dernier lien représenté sur la figure 4 entre les théories de cordes de type I et celles de types IIB⁽¹⁰⁾, le nombre de théories des cordes possibles est déjà réduit à seulement 2, par exemple les théories des cordes de type I et les théories des cordes de type IIA. Supposons que notre théorie ait d dimensions compactifiées, c'est-à-dire homéomorphes à un cercle, et D dimensions non compactifiées. Notre théorie est alors invariante sous l'action de $SO(d, d; \mathbb{Z})$

(10). Les théories de type I et IIB sont reliées entre elles par la composition d'une involution transformant les surfaces de Riemann fermées en surfaces de Riemann ouvertes avec cross-caps et de l'opérateur de parité fermionique $(-1)^F$ où F est le nombre de fermions de la théorie. Les théories de type I sont des orientifold des théories de type IIB. Voir [13] pour plus de détails. (N.d.R)

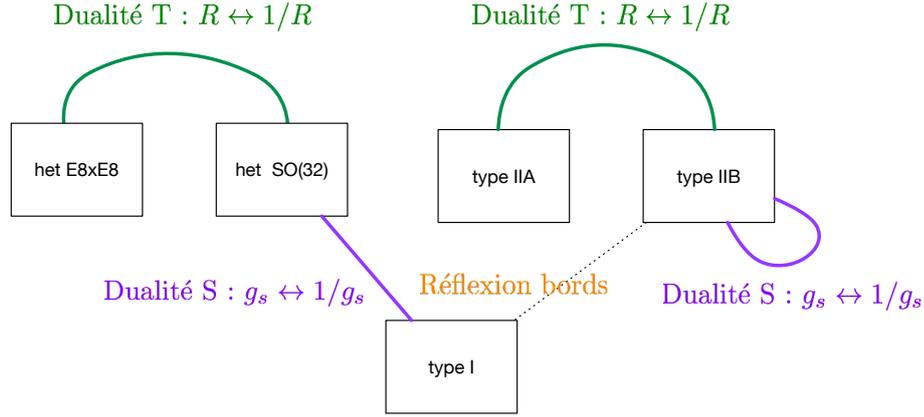


FIGURE 4 – Les différentes théories des cordes possible sont liées entre elles par les relations de dualité

par la dualité T , et sous l'action de $SL(2, \mathbb{Z})$ par la dualité S . Ces deux groupes agissent fidèlement sur les paramètres de notre théorie. L'action de ces deux groupes sur notre théorie ne commutent pas, le groupe de symétrie complet de la théorie est alors le groupe engendré par ces deux groupes, que l'on note $E_{d+1} = E_{11-D}$. On peut montrer que ces groupes correspondent respectivement pour $D = 3, 4, 5$ aux groupes de Lie exceptionnels réels E_8, E_7, E_6 .

$$E_{d+1}(\mathbb{Z}) := \langle SO(d, d; \mathbb{Z}), SL(2, \mathbb{Z}) \rangle. \quad (4.16)$$

Les dualités T et S sont réunies dans le groupe $E_{d+1}(\mathbb{Z})$ qui définit la dualité U (pour « dualité unifiée »). On peut alors étudier les groupes ainsi obtenus, mais leur calcul reste non-trivial, nous admettons donc les résultats présentés ci-après. Le tableau 1 présente les groupes de Lie réels $E_{11-D}(\mathbb{R})$, le sous-groupe compact maximal de $E_{11-D}(\mathbb{R})$ noté K_{11-D} et la restriction de $E_{11-D}(\mathbb{R})$ aux entiers relatifs $E_{11-D}(\mathbb{Z})$, caractérisant finalement le groupe $E_{d+1}(\mathbb{Z})$ de symétrie de la théorie.⁽¹¹⁾

D	$E_{11-D}(\mathbb{R})$	$E_{11-D}(\mathbb{Z})$	K_{11-D}
10A	\mathbb{R}^+	1	1
10B	$SL(2, \mathbb{R})$	$SL(2, \mathbb{Z})$	$SO(2)$
9	$SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$	$SL(2, \mathbb{Z})$	$SO(2)$
8	$SL(3, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$	$SL(3, \mathbb{Z}) \times SL(2, \mathbb{Z})$	$SO(3) \times SO(2)$
7	$SL(5, \mathbb{R})$	$SL(5, \mathbb{Z})$	$SO(5)$
6	$SO(5, 5, \mathbb{R})$	$SO(5, 5, \mathbb{Z})$	$SO(5) \times SO(5)$
5	$E_6(\mathbb{R})$	$E_6(\mathbb{Z})$	$USp(8)$
4	$E_7(\mathbb{R})$	$E_7(\mathbb{Z})$	$SU(8)/\mathbb{Z}_2$
3	$E_8(\mathbb{R})$	$E_8(\mathbb{Z})$	$Spin(16)/\mathbb{Z}_2$

TABLE 1 – Tableau des groupes $E_{11-D}(\mathbb{R})$, de leur restriction aux entiers relatifs $E_{11-D}(\mathbb{Z})$ caractérisant $E_{11-D}(\mathbb{Z})$ et du sous-groupe compact maximal K_{11-D} de $E_{11-D}(\mathbb{Z})$ selon les valeurs de D .

(11). Pour $D = 10$, les théories de type IIA et IIB ne sont pas équivalentes. Elles n'ont pas le même spectre et des groupes de symétries différents. Voir [4] pour plus de détails. (N.d.R)

Dans le tableau 1, on passe d'une ligne à la suivante en compactifiant une dimension supplémentaire. Le nombre de paramètres scalaires nécessaire pour décrire le vide de la théorie est donné par le rang du groupe quotient E_D/K_D . Le vide est donc paramétré par le champ $\vec{\varphi} \in \mathcal{M}_D = E_D/K_D$. Au fur et à mesure que le nombre de dimensions compactifiées augmente, le nombre de paramètres de $\vec{\varphi}$, c'est-à-dire le nombre de charges, augmente. Par exemple pour $D = 6$, les configurations du vide de la théorie des cordes sur l'espace-temps $\mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{T}^6$ est paramétrée par 70 scalaires qui sont les coordonnées de l'espace quotient $E_7(\mathbb{R})/(SU(8)/\mathbb{Z}_2)$. Parmi ces 70 charges, 56 correspondent à des charges électromagnétiques quantifiées de solutions de trou noir. Ces charges sont dans une représentation linéaire fidèle du groupe symplectique $Sp(56)$. Si l'on impose que notre théorie doive préserver ce groupe de symétrie, on obtient le groupe discret $E_7(\mathbb{Z}) = E_7(\mathbb{R}) \cap Sp(56, \mathbb{Z})$ qui se trouve être un groupe de Chevalley. De manière plus générale, pour les groupes $E_{d+1}(\mathbb{Z})$ avec $d \leq 6$ il existe une définition équivalente comme $E_{d+1}(\mathbb{Z}) = E_{d+1}(\mathbb{R}) \cap GL(\dim R, \mathbb{Z})$ où R est une représentation fidèle. Ainsi, par des considérations physiques, nous retrouvons les groupes de Chevalley que nous avons définis mathématiquement plus tôt. Bien sûr, nous n'avons ici rien démontré, mais cela fait partie des miracles de la théorie des cordes : une notion mathématique déjà existante se trouve être exactement l'objet apparaissant en théorie des cordes. C'est ce qui fait partie de la beauté de la théorie des cordes : certaines constructions mathématiques sophistiquées et abstraites trouvent grâce à la théorie des cordes une réalisation naturelle.

4.4 Groupes de dualité et géométrie

Nous avons commencé notre raisonnement avec des groupes dont l'interprétation géométrique en termes de symétries est évidente, comme $SO(d, d)$ ou $SL(2, \mathbb{R})$. Pour les groupes exceptionnels E_6 , E_7 , E_8 , leur interprétation géométrique est moins évidente. Supposons que nous nous placions dans l'espace $\mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{T}^5 \times S^1(r_{10-D})$, un espace à six dimensions compactifiées dont on a distingué l'une d'elles, de rayon r_{10-D} . Alors, lorsque $r_{10-D} \rightarrow +\infty$, la dimension se décompactifie et redevient une dimension euclidienne. On a donc :

$$\mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{T}^5 \times S^1(r_{10-D}) \xrightarrow[r_{10-D} \rightarrow \infty]{} \mathbb{R}^{1,4} \times \mathbb{T}^5. \quad (4.17)$$

Dans cette limite, on perd une dimension compacte. En regardant la table 1, on peut voir que le groupe de symétrie de la théorie passe alors de $E_{7(7)}(\mathbb{Z})$ au groupe $E_{6(6)}(\mathbb{Z})$. Ce résultat peut s'interpréter grâce au diagramme de Dynkin. Notre groupe $E_{7(7)}(\mathbb{Z})$ a un grand nombre de paramètres. En prenant un de ces paramètres tendant vers l'infini, on se place dans un domaine du groupe qui a $E_{6(6)}(\mathbb{Z})$ comme sous-groupe. De manière plus formelle, la définition que l'on trouve dans la littérature mathématique est que le groupe de dualité E_{d+1} est plongé dans le sous-groupe parabolique maximal $P_{\alpha_{d+1}} = L_{\alpha_{d+1}}U$ avec facteur de Levi $L_{\alpha_{d+1}} = GL(1) \cdot E_d$ du groupe de dualité E_{d+1} où U est un facteur unipotent et $P_{\alpha_{d+1}}$ est le sous-groupe compact maximal associé à une racine.

Cette définition permet d'interpréter l'opération de décompactification en termes de diagrammes de Dynkin. Le diagramme de Dynkin de E_7 est obtenu à partir de celui de E_8 en éliminant la dernière racine. En éliminant les deux dernières racines, on obtient celui de E_6 . Ce résultat est illustré sur la figure 5. En fait, toute l'information sur la géométrie des dimensions supplémentaires de l'espace-temps est encodée dans le réseau des racines. La donnée du réseau des racines, issue de la théorie des groupes, est équivalente à des données géométriques

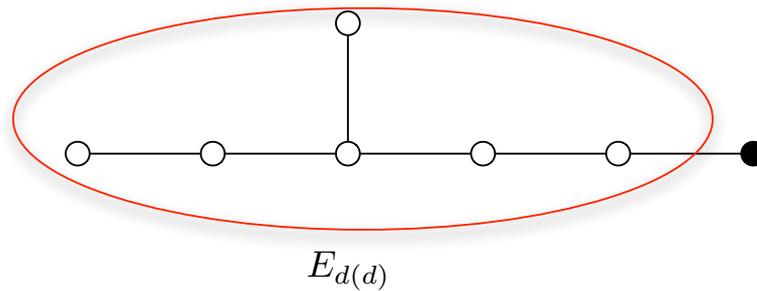


FIGURE 5 – Le diagramme de Dynkin de $E_{d(d)}$ est obtenu à partir de celui de $E_{d+1(d+1)}$ en supprimant la dernière racine pour $d \geq 6$.

en termes de rayons de cercle et d'angles. Il existe tout un dictionnaire permettant de passer de l'un à l'autre.

Au lieu d'éliminer la dernière racine, on peut chercher à éliminer la première par une construction similaire. Cette opération est représentée sur la figure 6 dans le cas du groupe E_7 . Cette opération traduit la T -dualité de la théorie. Mathématiquement, la symétrie de dualité T de la théorie des cordes libre $SO(d, d)$ est obtenue en considérant le sous-groupe parabolique maximal $P_{\alpha_1} = L_{\alpha_1} U_{\alpha_1}$ de E_{d+1} où le facteur de Levi est $GL(1) \cdot SO(d, d)$. Le paramètre $GL(1)$ noté r est alors relié à la constante de couplage des cordes $r^2 = 1/g_D^2$.

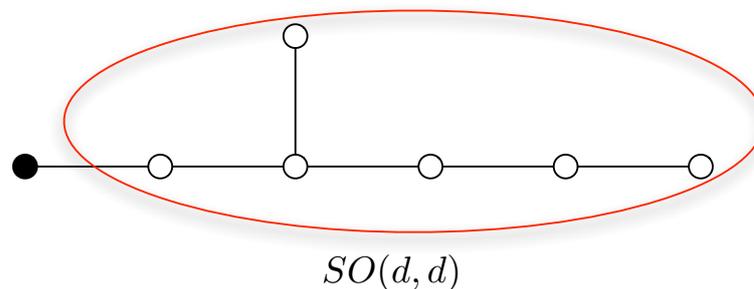


FIGURE 6 – Interprétation de la T -dualité en termes de diagrammes de Dynkin

Ainsi, les groupes de dualité E_{d+1} contiennent toute l'information sur les symétries que nous avons décrites auparavant.

Deuxième partie

5 Formes automorphes et séries d'Eisenstein en théorie des cordes

Maintenant, nous allons nous intéresser aux calculs d'interactions entre particules intervenant en théorie des cordes. Pour ce faire, on associe une fonction à valeurs complexe à la somme des processus décrits par les cordes fluctuantes. Cette fonction est une fonction des paramètres

de la théorie des cordes. Considérons par exemple la diffusion de deux gravitons en théorie des cordes. La fonction associée à ce processus a la forme suivante :

$$T_D(\vec{\varphi}, \sigma_{2,3}) = \frac{\mathcal{E}_{(0,-1)}^{(D)}(\vec{\varphi})}{\sigma_3} + \sum_{p,q \geq 0} \mathcal{E}_{(p,q)}^{(D)}(\vec{\varphi}) \sigma_2^p \sigma_3^q, \quad (5.1)$$

où

σ_2, σ_3 sont des invariants cinématiques,

$\vec{\varphi}$ est l'ensemble des paramètres définissant le vide de la théorie,

$\mathcal{E}_{(0,-1)}^{(D)}(\vec{\varphi}) = 1$ pour reproduire la théorie d'Einstein de la diffusion de gravitons à l'ordre dominant.

Les configurations du vides étant données par l'espace quotient du groupe réel $E_d(\mathbb{R})$ par son sous-groupe compact maximal K_d , on peut considérer les fonctions $\mathcal{E}_{(p,q)}^{(D)}$ comme des fonctions de $E_d(\mathbb{R})$ dans \mathbb{C} . La quantification des charges implique que la théorie est invariante sous l'action du sous-groupe discret $E_{d+1}(\mathbb{Z})$:

$$\mathcal{E}_{(p,q)}^{(D)}(\gamma \cdot \vec{\varphi}) = \mathcal{E}_{(p,q)}^{(D)}(\vec{\varphi}); \quad \gamma \in E_{d+1}(\mathbb{Z}). \quad (5.2)$$

L'équation (5.2) exprime que $\mathcal{E}_{(p,q)}^{(D)}$ est une forme automorphe pour le groupe $E_{d+1}(\mathbb{Z})$. Autrement dit, ce sont des fonctions d'un groupe topologique G dans \mathbb{C} invariante sous l'action d'un sous-groupe discret $\Gamma \subset G$. En réalité, la définition mathématique des formes automorphes est plus sophistiquée, mais celle-ci est suffisante dans le cadre de ce texte.

En utilisant d'autres contraintes issues de la supersymétrie de la théorie des cordes, on peut montrer que ces fonctions satisfont d'autres équations différentielles. Par exemple pour les premières valeurs positives de p, q on a :

$$\left(\Delta - \frac{3(11-D)(D-8)}{D-2} \right) \mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)}(\vec{\varphi}) = 6\pi \delta_{D-8,0}, \quad (5.3)$$

$$\left(\Delta - \frac{5(12-D)(D-7)}{D-2} \right) \mathcal{E}_{(1,0)}^{(D)}(\vec{\varphi}) = 40\zeta(2)\delta_{D-7,0} + 7\mathcal{E}_{(0,0)}^{(6)}\delta_{D-6,0}, \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{6(14-D)(D-6)}{D-2} \right) \mathcal{E}_{(0,1)}^{(D)}(\vec{\varphi}) &= -(\mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)}(\vec{\varphi}))^2 - 40\zeta(3)\delta_{D-6,0} \\ &\quad - \frac{55}{3}\mathcal{E}_{(0,0)}^{(5)}\delta_{D-5,0} - \frac{85}{2\pi}\mathcal{E}_{(1,0)}^{(4)}\delta_{D-4,0}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

En règle générale, les deux premières équations (5.3) et (5.4) sont homogènes sauf en des dimensions particulières, tandis que l'équation (5.5) est inhomogène. Ces équations sont intéressantes car les facteurs numériques de leur membre de gauche sont les valeurs propres qui sont dictées par les symétries de la théorie. De plus elles ont une interprétation physique simple : les cas où la valeur propre s'annule correspondent au cas où la limite de théorie des champs de la théorie des cordes est divergente. Pour $D \leq 10$, les valeurs propres s'annulent pour les dimensions critiques D_c données par l'équation suivante :

$$D_c = \begin{cases} 8 & \text{pour } L = 0 \\ 4 + 6/L & \text{pour } 2 \leq L \leq 3 \end{cases}. \quad (5.6)$$

Ces divergences sont celles d'une théorie connue appelée supergravité maximale, qui est l'approximation de basse énergie de la théorie supersymétrique des cordes. Le calcul de théorie des champs [14] fait intervenir de nombreuses intégrales de Feynman multidimensionnelles. Nous avons remarqué que les trois graphes de Feynman (a), (b) et (c) de la première ligne de la figure 1 sont obtenus par une limite de l'unique diagramme de théorie de corde donnée par une sphère avec quatre points marqués. Ici nous pouvons analyser les divergences de la théorie de supergravité simplement en analysant les symétries de la théorie des cordes et sans avoir fait de calcul de théorie des champs.

Lorsque je me place dans une des deux limites décrites précédemment, par exemple la limite où le rayon du cercle est grand correspondant à la limite de décompactification, on a un paramètre r tendant vers l'infini. On peut donc développer une forme automorphe ϕ^G pour le groupe G par rapport à r selon ses racines et des termes négligeables devant r :

$$\phi^G = \sum_i r^{\alpha_i} \phi_i^{G'}(g) + O(e^{-r}) \quad r \rightarrow \infty, \quad (5.7)$$

où $\phi_i^{G'}(g)$ est une forme automorphe pour G' du facteur de Levi. Avec la donnée des équations différentielles (5.3), (5.4), (5.5) et en regardant les différentes limites présentées auparavant, on peut calculer les conditions aux bords nous permettant de résoudre ces équations. En faisant le calcul dans la limite de couplage faible $g_s \rightarrow 0$ on obtient :

$$\mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)}(\vec{\varphi}) = g_s^{-2\frac{8-D}{D-2}} \left(\frac{2\zeta(3)}{g_s^2} + I_{1\text{-boucles}} \right) + O(e^{-\frac{1}{g_s}}), \quad (5.8)$$

$$\mathcal{E}_{(1,0)}^{(D)}(\vec{\varphi}) = g_s^{-4\frac{7-D}{D-2}-2} \left(\frac{\zeta(5)}{g_s^2} + I_{1\text{-boucles}} + g_s^2 I_{2\text{-boucles}} \right) + O(e^{-\frac{1}{g_s}}), \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(0,1)}^{(D)}(\vec{\varphi}) &= g_s^{-6\frac{6-D}{D-2}-4} \left(\frac{2\zeta(3)^2}{3g_s^2} + I_{1\text{-boucles}} + g_s^2 I_{2\text{-boucles}} + g_s^4 I_{3\text{-boucles}} \right) \\ &+ O(e^{-\frac{1}{g_s}}), \end{aligned} \quad (5.10)$$

L'équation (5.8) nous donne le comportement de $\mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)}(\vec{\varphi})$ lorsque g_s tend vers zéro. Le premier coefficient de la théorie des cordes est simplement un nombre, le deuxième est une forme automorphe du groupe $SO(10-D, 10-D, \mathbb{R})$, et tout le reste des coefficients est nul. De la même manière, dans les équations (5.9) et (5.10) on obtient respectivement trois et quatre termes qui sont soit des constantes, soit des formes automorphes $I_{g\text{-boucles}}$ de $SO(10-D, 10-D, \mathbb{R})$. Les contributions $I_{g\text{-boucles}}$ peuvent être obtenues par intégration sur la surface Σ_g . Mais la détermination des formes automorphes $\mathcal{E}_{(p,q)}^{(D)}$ permet de s'affranchir de ce calcul. Supposons que l'on travaille avec $D = 4$ et donc le groupe de symétrie E_7 . À priori, ce développement aurait pu avoir autant de termes que l'ordre du groupe de Weyl. Pour E_7 le cardinal de son groupe de Weyl est $|W(E_7)| = 2903040$ (et pour E_8 on a $|W(E_8)| = 696729600$). La théorie des cordes donne donc des contraintes énormes puisque quasiment tous ces coefficients sont nuls.

On obtient un résultat similaire dans la limite de décompactification $r_d \rightarrow +\infty$ où r_d est le rayon adimensionné :

$$\mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)}(\vec{\varphi}) = r_d \mathcal{E}_{(0,0)}^{(D+1)}(\vec{\varphi}) + r_d^{8-D} \zeta(8-D) + O(e^{-r_d}), \quad (5.11)$$

$$\mathcal{E}_{(1,0)}^{(D)}(\vec{\varphi}) = r_d \mathcal{E}_{(1,0)}^{(D+1)}(\vec{\varphi}) + r_d^{6-D} \mathcal{E}_{(0,0)}^{(D+1)}(\vec{\varphi}) + r_d^{12-D} \zeta(12-D) + O(e^{-r_d}), \quad (5.12)$$

$$\mathcal{E}_{(0,1)}^{(D)}(\vec{\varphi}) = r_d \mathcal{E}_{(0,1)}^{(D+1)}(\vec{\varphi}) + r_d^{8-D} \mathcal{E}_{(0,0)}^{(D+1)}(\vec{\varphi}) + r_d^{4-D} \mathcal{E}_{(1,0)}^{(D+1)}(\vec{\varphi}) + r_d^{14-D} \zeta(14-D) + O(e^{-r_d}). \quad (5.13)$$

Ces équations –dont nous avons simplifiés les coefficients numériques– montrent comment les interactions en dimensions $D + 1$ sont obtenues par une limite une de celles en dimensions D . Ainsi la connaissance des couplages de la théorie dans un espace de tridimensionnel avec le groupe de dualité $E_{8(8)}$ contient toutes les informations sur la théorie en dimension supérieure. Tous les effets de la géométrie de l'espace-temps sur les théorie des cordes sont donc obtenus par l'action des groupes de dualité.

Pour un mathématicien spécialiste des représentations automorphes, ce résultat est quasiment miraculeux. Il se trouve que ces formes automorphes particulières sont connues en mathématiques : ce sont les séries d'Eisenstein. Ces séries ont notamment été étudiées par Langlands dans ses travaux. Grâce à cela, on a pu montrer que les amplitudes quantiques de théorie des cordes sont données par des séries d'Eisenstein spéciales.

$E_{d+1}(\mathbb{Z})$	$\mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)}$	$\mathcal{E}_{(1,0)}^{(D)}$
$E_{8(8)}(\mathbb{Z})$	$2\zeta(3) \mathbf{E}_{[1\ 0^7]; \frac{3}{2}}^{E_8}$	$\zeta(5) \mathbf{E}_{[1\ 0^7]; \frac{5}{2}}^{E_8}$
$E_{7(7)}(\mathbb{Z})$	$2\zeta(3) \mathbf{E}_{[1\ 0^6]; \frac{3}{2}}^{E_7}$	$\zeta(5) \mathbf{E}_{[1\ 0^6]; \frac{5}{2}}^{E_7}$
$E_{6(6)}(\mathbb{Z})$	$2\zeta(3) \mathbf{E}_{[1\ 0^5]; \frac{3}{2}}^{E_6}$	$\zeta(5) \mathbf{E}_{[1\ 0^5]; \frac{5}{2}}^{E_6}$
$SO(5, 5, \mathbb{Z})$	$2\zeta(3) \mathbf{E}_{[10000]; \frac{3}{2}}^{SO(5,5)}$	$\zeta(5) \widehat{\mathbf{E}}_{[10000]; \frac{5}{2}}^{SO(5,5)} + \frac{8\zeta(6)}{45} \widehat{\mathbf{E}}_{[00001]; 3}^{SO(5,5)}$
$SL(5, \mathbb{Z})$	$2\zeta(3) \mathbf{E}_{[1000]; \frac{3}{2}}^{SL(5)}$	$\zeta(5) \widehat{\mathbf{E}}_{[1000]; \frac{5}{2}}^{SL(5)} + \frac{6\zeta(5)}{\pi^3} \widehat{\mathbf{E}}_{[0010]; \frac{5}{2}}^{SL(5)}$
$SL(3, \mathbb{Z}) \times SL(2, \mathbb{Z})$	$2\zeta(3) \widehat{\mathbf{E}}_{[10]; \frac{3}{2}}^{SL(3)} + 2\widehat{\mathbf{E}}_1(U)$	$\zeta(5) \mathbf{E}_{[10]; \frac{5}{2}}^{SL(3)} - 8\zeta(4)_{[10]; -\frac{1}{2}}^{SL(3)} \mathbf{E}_2(U)$
$SL(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^+$	$2\zeta(3) \mathbf{E}_{\frac{3}{2}}(\Omega) \nu_1^{-\frac{3}{7}} + 4\zeta(2) \nu_1^{\frac{4}{7}}$	$\frac{\zeta(5) \mathbf{E}_{\frac{5}{2}}}{\nu_1^{\frac{5}{7}}} + \frac{4\zeta(2)\zeta(3)}{15} \nu_1^{\frac{9}{7}} \mathbf{E}_{\frac{3}{2}} + \frac{4\zeta(2)\zeta(3)}{15\nu_1^{\frac{12}{7}}}$
$SL(2, \mathbb{Z})$	$2\zeta(3) \mathbf{E}_{\frac{3}{2}}(\Omega)$	$\zeta(5) \mathbf{E}_{\frac{5}{2}}(\Omega)$

TABLE 2 – Expression des formes automorphes $\mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)}(\vec{\varphi})$ et $\mathcal{E}_{(1,0)}^{(D)}(\vec{\varphi})$ en termes de séries d'Eisenstein selon le groupe de symétrie de la théorie $E_{d+1}(\mathbb{Z})$

Les expressions de $\mathcal{E}_{(0,0)}^{(D)}(\vec{\varphi})$ et $\mathcal{E}_{(1,0)}^{(D)}(\vec{\varphi})$ en fonction du groupe de symétrie de la théorie sont représentées dans le tableau 2. Les séries d'Eisenstein sont des fonctions attachées à des nœuds de diagramme de Dynkin : la notation $\mathbf{E}_{[1\ 0^7]; \frac{3}{2}}^{E_8}$ signifie que cette fonction est attachée à la première racine, on lui assigne donc la valeur 1, et à aucune des suivantes qui ont donc toutes la valeur 0. On remarque une certaine régularité puisque la séquence de 0 diminue lorsque le nombre de dimensions compactifiées augmente. L'indice $\frac{3}{2}$ ne change pas avec la dimension, mais augmente de 1 lorsque l'on regarde les expressions de $\mathcal{E}_{(1,0)}^{(D)}(\vec{\varphi})$. Ces résultats font partie

des miracles de la théorie des cordes. Il est possible de résoudre les équations (5.3) et (5.4) uniquement parce que nous avons autant de coefficients nuls dans certaines limites de la théorie des cordes.

6 Le cas des formes modulaires : la théorie des cordes de type IIB sur $\mathbb{R}^{1,9}$

Maintenant, nous allons nous intéresser à la théorie des cordes de type IIB définie sur $\mathbb{R}^{1,9}$. L'espace des configurations du vides est donc obtenu comme le quotient du groupe réel par son sous-groupe compact maximal. Dans notre cas, le groupe est $SL(2, \mathbb{R})$ agissant sur le demi-plan hyperbolique \mathbb{H} par homographie :

$$\gamma \cdot z = \frac{az + b}{cz + d} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \quad (6.1)$$

Son sous-groupe compact maximal est $SO(2) \cong SL(2, \mathbb{R})_i$. Donc l'espace quotient $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ est donné par l'orbite de i sous l'action de $SL(2, \mathbb{R})$, c'est à dire le demi-plan hyperbolique \mathbb{H} . Les configurations du vides sont donc paramétrées par un champ scalaire $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2 \in \mathbb{H}$. Le groupe de dualité de la théorie est $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$, donc les fonctions $\mathcal{E}_{(p,q)}^{(10)}$ sont des fonctions de \mathbb{H} dans \mathbb{C} invariantes sous l'action de $SL(2, \mathbb{Z})$, ce qui est la définition des formes modulaires. Là encore, la véritable définition mathématique des formes modulaires est plus élaborée, mais celle-ci sera suffisante dans le cadre de ce texte.

$$\mathcal{E}_{(p,q)}^{(10)} \left(\frac{a\Omega + b}{c\Omega + d} \right) = \mathcal{E}_{(p,q)}^{(10)}(\Omega). \quad (6.2)$$

En particulier, ces fonctions sont périodiques de période 1 : $\mathcal{E}_{(p,q)}^{(10)}(\Omega + 1) = \mathcal{E}_{(p,q)}^{(10)}(\Omega)$. On peut donc s'intéresser à leur développement de Fourier :

$$\mathcal{E}_{(p,q)}^{(10)}(\Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{(p,q),n}^{(10)}(\Omega_2) e^{2i\pi n \Omega_1}. \quad (6.3)$$

Dans l'équation (6.3), on peut voir que les coefficients $f_{(p,q),n}^{(10)}(\Omega_2)$ du développement de Fourier sont des fonctions de la constante de couplage de la théorie $\mathcal{I}m(\Omega) = \Omega_2 = 1/g_s$. Dans la limite de couplage fort, on doit retrouver les amplitudes issues de la série perturbative correspondant au développement de l'action en genre (2.5). En calculant le terme constant du développement de Fourier, on obtient :

$$f_{(0,0),0}^{(10)}(\Omega_2) = \int_0^1 \mathcal{E}_{(0,0)}^{(10)}(\Omega) d\Omega_1 = \Omega_2^{-\frac{1}{2}} (2\zeta(3)\Omega_2^2 + 4\zeta(2)), \quad (6.4)$$

$$f_{(1,0),0}^{(10)}(\Omega_2) = \int_0^1 \mathcal{E}_{(1,0)}^{(10)}(\Omega) d\Omega_1 = \Omega_2^{\frac{1}{2}} \left(\zeta(5)\Omega_2^2 + 0 + \frac{8\zeta(4)}{3}\Omega_2^{-2} \right), \quad (6.5)$$

$$f_{(0,1),0}^{(10)}(\Omega_2) = \int_0^1 \mathcal{E}_{(0,1)}^{(10)}(\Omega) d\Omega_1 = \Omega_2 \left(\frac{2\zeta(3)^2}{3}\Omega_2^2 + \frac{4\zeta(2)\zeta(3)}{3} + \frac{4\zeta(4)}{\Omega_2^2} + \frac{4\zeta(6)}{26\Omega_2^4} \right) + O(e^{-\Omega_2}). \quad (6.6)$$

Les résultats obtenus dans les équations (6.4) (6.5) et (6.6) sont respectivement similaires aux équations (5.8), (5.9) et (5.10) obtenues dans la partie précédente grâce à la T -dualité :

on trouve le même nombre de termes dans chaque expression et les mêmes facteurs numériques s'expriment en fonction de la fonction zêta de Riemann. De nombreux calculs de théorie des cordes s'expriment en termes de valeurs spéciales des fonctions zêtas. Les résultats obtenus pointaient vers une simplicité mathématique alors inconnue. Il s'avère que tous les coefficients sont des valeurs zêta multiples univaluées introduites par Francis Brown récemment [15]. On a encore une convergence fortuite miraculeuse entre des notions de physique et de mathématique.

Ces formes modulaires vérifient chacune une équation différentielle. Les trois équations (5.3), (5.4), (5.5) deviennent dans ce cas :

$$\left(\Delta - \frac{3}{4}\right) \mathcal{E}_{(0,0)}^{(10)}(\Omega) = 0, \quad (6.7)$$

$$\left(\Delta - \frac{15}{4}\right) \mathcal{E}_{(1,0)}^{(10)}(\Omega) = 0, \quad (6.8)$$

$$(\Delta - 12)\mathcal{E}_{(0,1)}^{(10)}(\Omega) = -(\mathcal{E}_{(0,0)}^{(10)}(\Omega))^2, \quad (6.9)$$

où $\Delta = \Omega_2^2(\partial_{\Omega_1}^2 + \partial_{\Omega_2}^2)$ est le laplacien hyperbolique.

Les conditions aux limites $\Omega_2 \rightarrow +\infty$ impliquent que les deux premiers couplages solutions des équations (6.7) et (6.8) sont donnés par :

$$\mathcal{E}_{(0,0)}^{(10)}(\Omega) = 2\zeta(3)E_{\frac{3}{2}}(\Omega), \quad (6.10)$$

$$\mathcal{E}_{(1,0)}^{(10)}(\Omega) = \zeta(5)E_{\frac{5}{2}}(\Omega), \quad (6.11)$$

où $E_s(\Omega)$ est une série d'Eisenstein, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} E_s(\Omega) &= \zeta(2s) \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash SL(2, \mathbb{Z})} (\text{Im}(\gamma \cdot \Omega))^s = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{\Omega_2^s}{|m\Omega + n|^{2s}} \\ &= 2\zeta(2s)\Omega_2^s + 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \zeta(2s - 1)\Omega_2^{1-s} \\ &\quad + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} \sqrt{\Omega_2} \sum_{n \neq 0} |n|^{s-\frac{1}{2}} \sum_{d||n} d^{1-2s} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|\Omega_2) e^{2i\pi n\Omega_1} \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\text{où } \Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

La série d'Eisenstein peut être vue comme la somme des parties imaginaires des images de l'action de $SL(2, \mathbb{Z})$ mises à la puissance s . Cet objet a un développement de Fourier possédant deux termes constants, et dont les coefficients de Fourier sont non triviaux et donnés par des fonctions de Bessel.

Contrairement aux deux autres, l'équation non homogène (6.9) n'est pas résoluble simplement sous la forme d'une série d'Eisenstein. La solution de cette équation est

$$\mathcal{E}_{(0,1)}^{(10)}(\Omega) = \frac{2\zeta(3)^2}{3} E_{\frac{3}{2}}(\Omega) + \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash SL(2, \mathbb{Z})} \Phi(\gamma \cdot \Omega), \quad (6.13)$$

avec

$$\Phi(x + iy) = 4\zeta(3)h\left(\frac{x}{y}\right) \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sigma_{-2}(|n|) e^{2i\pi n(x+u)} \right) du, \quad (6.14)$$

où $h(x)$ est l'unique fonction paire réelle infiniment différentiable avec $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|^3 h(x) = 1/6$ satisfaisant

$$\left(\frac{d}{dx} (1 + x^2) \frac{d}{dx} - 12 \right) h(x) = -\frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (6.15)$$

La forme $\mathcal{E}_{(0,1)}^{(10)}(\Omega)$ est la somme d'une série d'Eisenstein et d'un objet plus compliqué que l'on peut écrire comme un produit de convolution. L'analyse des corrections quantiques induites par la théorie des cordes mène à de nouvelles formes modulaires alors inconnues.

7 Conclusion

Une fois que l'on connaît les solutions de ces équations, la structure mathématique et donc les prédictions de la théorie sont complètement déterminées. Ces solutions incluent les termes correctifs que doit fournir la théorie des cordes. Maintenant, on peut se demander quelle est l'interprétation physique de cette théorie. Les modes de Fourier de ces solutions donnent des informations sur des configurations particulières qui sont des trous noirs microscopiques. Les propriétés des modes de Fourier ont à voir avec les propriétés de ces trous noirs microscopiques sélectionnés par la théorie des cordes. On espère pouvoir comprendre des aspects non triviaux de la physique des trous noirs ou de la gravité quantique par une compréhension détaillée des propriétés mathématiques des modes de Fourier de ces fonctions. Les objets décrits ici n'ont pas de lien direct avec les grandeurs physiques observables aujourd'hui. Néanmoins, on a atteint un point où la convergence de faits mathématiques—représentation automorphes, théorie des nombres, etc.—avec la théorie des cordes semble indiquer que cette dernière est un cadre naturel pour pouvoir calculer les quantités physiques pertinentes pour une théorie de gravité quantique. Plus important encore, la théorie des représentations automorphes permet de mener à bien des calculs de la théorie des cordes, ce qui ouvre la porte à d'éventuels tests de la théorie des cordes en exhibant certaines de ses propriétés de gravité quantique.

Références

- [1] Michael B. Green, Jorge G. Russo, and Pierre Vanhove. *Automorphic properties of low energy string amplitudes in various dimensions*. *Phys. Rev. D*, **81** :086008, 2010.
- [2] Michael B. Green, Jorge G. Russo, and Pierre Vanhove. *String theory dualities and super-gravity divergences*. *JHEP*, **06** :075, 2010.
- [3] Michael B. Green, Stephen D. Miller, Jorge G. Russo, and Pierre Vanhove. *Eisenstein series for higher-rank groups and string theory amplitudes*. *Commun. Num. Theor. Phys.*, **4** :551–596, 2010.
- [4] Michael B. Green, Stephen D. Miller, and Pierre Vanhove. *Small representations, string instantons, and Fourier modes of Eisenstein series*. *J. Number Theor.*, **146** :187–309, 2015.
- [5] Michael B. Green, Stephen D. Miller, and Pierre Vanhove. *$SL(2, \mathbb{Z})$ -invariance and D -instanton contributions to the $D^6 R^4$ interaction*. *Commun. Num. Theor. Phys.*, **09** :307–344, 2015.
- [6] Philipp Fleig, Henrik P. A. Gustafsson, Axel Kleinschmidt, and Daniel Persson. *Eisenstein series and automorphic representations*. Cambridge University Press, 6 2018.
- [7] Boris Pioline and Andrew Waldron. Automorphic forms : A Physicist’s survey. In *Les Houches School of Physics : Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry*, pages 277–302, 2007.
- [8] Edward Witten. String theory dynamics in various dimensions. *Nucl. Phys. B*, 443 :85–126, 1995.
- [9] Schwarz John H. Green, Michael B. and Edward Witten. *Superstring Theory. Vol. 1 : Introduction*, volume 1 of *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1987.
- [10] Joseph Polchinski. *String Theory*, volume 1 of *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1998.
- [11] Katrin Becker, Melanie Becker, and John H. Schwarz. *String Theory and M-Theory : A Modern Introduction*. Cambridge University Press, 2006.
- [12] Ralph Blumenhagen, Dieter Lüst, and Stefan Theisen. *Basic concepts of string theory*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer, Heidelberg, Germany, 2013.
- [13] Pierre Vanhove and Federico Zerbini. *Building blocks of closed and open string amplitudes*. In *MathAmplitudes 2019 : Intersection Theory and Feynman Integrals*, 7 2020.
- [14] Zvi Bern, John Joseph Carrasco, Lance J. Dixon, Henrik Johansson, and Radu Roiban. Amplitudes and Ultraviolet Behavior of $N = 8$ Supergravity. *Fortsch. Phys.*, 59 :561–578, 2011.
- [15] Francis Brown. *Multiple zeta values and periods of moduli spaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$* . *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure, Série 4*, **Tome 42 (2009) no. 3** :371–489, 2009.