

Les motifs cachés de l'univers

Quand la physique rencontre la géométrie algébrique

Pierre Vanhove



19ème Journée des Doctorants en Mathématiques de la région
Hauts-de-France (JDM 2025)
Louvre, Lens

Part I

Physique et mathématiques: deux approches

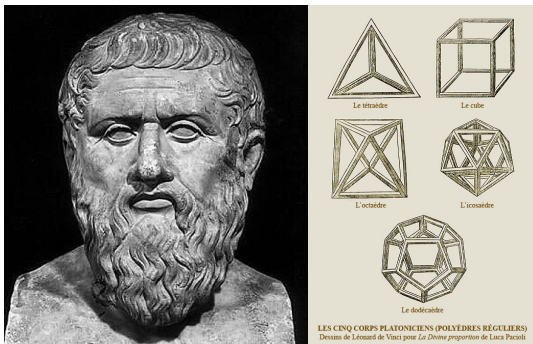
Physique : expériences : étude des propriétés fondamentales du monde réel en particulier ses changements et ses mouvements



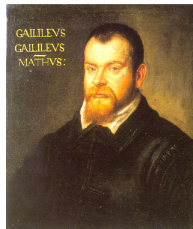
Aristote (-384, -322)



Mathématique : abstraction extrême - sans contact réel nécessaire avec la nature



Platon (-427, -347)

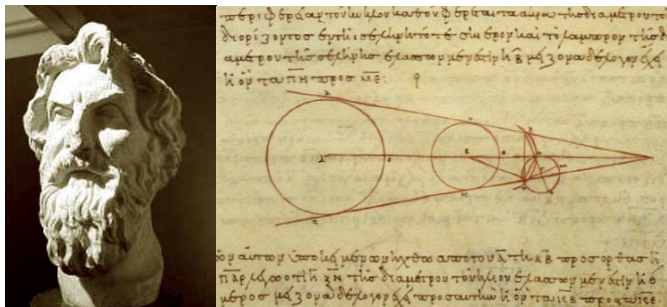


Galilée (1564-1642)

La philosophie est écrite dans ce grand livre qui se tient constamment ouvert devant nos yeux, je veux dire l'univers. (...) Cette philosophie, elle est écrite en langue mathématique.

Ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquelles il est impossible de saisir humainement quelque parole, et sans lesquelles on ne fait qu'errer vainement dans un labyrinthe obscur.

Langage de la Nature

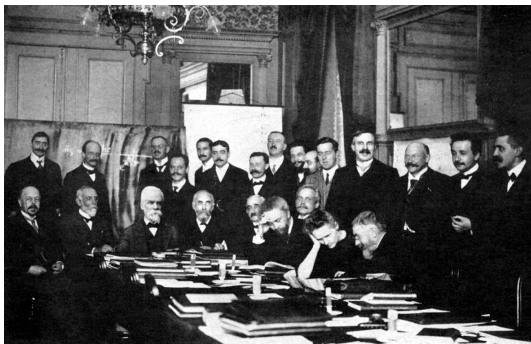


Aristarque de Samos (310–230 av. J.C.) utilisa le théorème de Thalès pour estimer le rayon de la Lune, du Soleil et leur distance à la Terre

Il calcule que la Lune est 3 fois plus petite que la Terre et située à 20 rayons terrestres, alors que le Soleil est six fois plus gros que la Terre et éloigné de 380 rayons terrestres

Il conclut logiquement que la Terre tourne autour du Soleil.

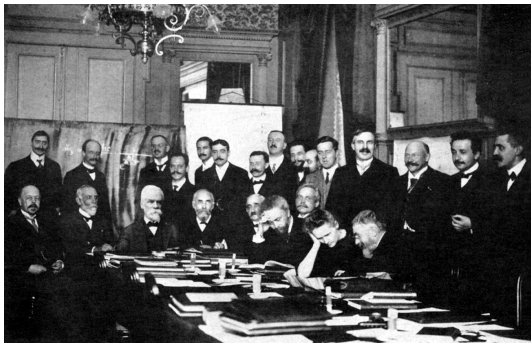
La mathématique : un langage naturel



Henri Poincaré (1854-1912) était un grand physicien mathématicien

Toutes les lois (de la nature) sont donc tirées de l'expérience; mais pour les énoncer il faut une langue spéciale; le langage ordinaire est trop pauvre, il est d'ailleurs trop vague pour exprimer des rapports si délicats, si riches, si précis. (...)

La mathématique : un langage naturel



Henri Poincaré (1854-1912) était un grand physicien mathématicien

Qui nous a appris à connaître les analogies véritables, profondes, celles que les yeux ne voient pas et que la raison devine? C'est l'esprit mathématique, qui dédaigne la matière pour ne s'attacher qu'à la forme pure.

Mathématiques pures



Groupe Bourbaki: André Weil, sa soeur Simone Weil, Henri Cartan, Szolem Mandelbrojt, Claude Chevalley et Jean Delsarte.

L'approche en mathématiques pures nécessite une focalisation sur des concepts abstraits, des cadres théoriques et des démonstrations rigoureuses, permettant la compréhension des vérités et des relations fondamentales en soi, et non pas uniquement pour leurs applications pratiques immédiates.

Mathématiques pures



Groupe Bourbaki: André Weil, sa soeur Simone Weil, Henri Cartan, Szolem Mandelbrojt, Claude Chevalley et Jean Delsarte.

Pour le groupe Nicolas Bourbaki, les mathématiciens sont persuadés qu'ils démontrent des « vérités » ou des « propositions vraies »

Mathématiques divines



La philosophe Simone Weil considère que les êtres mathématiques sont soumis à la nécessité qu'expriment les implications logiques, et celle de la matière soumise à des lois mathématiques.

Elle écrit dans le Cahier XI :

« La mathématique est la preuve que tout obéit à Dieu. »

Part II

La physique au service des mathématiques

La physique au service des mathématiques



En 1932 Pavel Florensky (prêtre et mathématicien) publie dans la revue *Reconstruction socialiste et science* un article intitulé « La physique au service des mathématiques ». Il présente divers dispositifs physiques pour résoudre des problèmes de mathématiques

Il faut plutôt noter une certaine exagération dans l'évaluation des méthodes mathématiques lorsqu'il s'agit de la physique moderne, où le contenu physique concret est tellement éclipsé par l'appareil mathématique qu'il devient inaccessible à l'étudiant, et échappe parfois même à celui qui applique ce traitement.

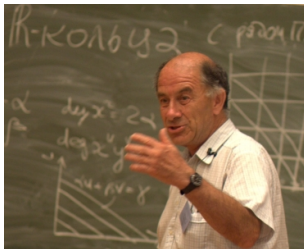
La physique au service des mathématiques



En 1932 Pavel Florensky (prêtre et mathématicien) publie dans la revue *Reconstruction socialiste et science* un article intitulé « La physique au service des mathématiques ». Il présente divers dispositifs physiques pour résoudre des problèmes de mathématiques

Cependant, l'idée que les racines des mathématiques remontent aux profondeurs de l'expérience n'est pas devenue un savoir commun. Cela se reflète dans les tentatives constantes de « purifier » les mathématiques, c'est-à-dire de les libérer des intuitions qui y sont entrées apparemment par accident et qui sont donc interprétées comme des psychologismes, de mauvaises habitudes de pensée et des erreurs d'exposition, alors qu'au fond les mathématiques se réduisent ostensiblement à la logique pure.

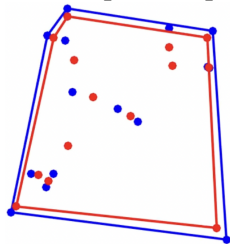
Les mathématique une physique bon marché ?



Pour Vladimir Arnol'd (1937-2010) les mathématiques sont la partie de la physique où les expériences ne coûtent pas cher

le théorème de Gauss-Lucas

Un exemple cité par Florensky est le théorème de Gauss-Lucas



Théorème de Gauss-Lucas : Soit $P(z)$ un polynôme non constant à coefficients complexes. Alors **tout zéro** de $P'(z) = dP(z)/dz$ appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble des zéros de $P(z)$

Preuve: Si $P(X)$ est un polynôme non constant il est décomposable sur $\mathbb{C}$

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^r (X - \mu_k)^{n_k}, \quad \frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^r \frac{n_k}{X - \mu_k}$$

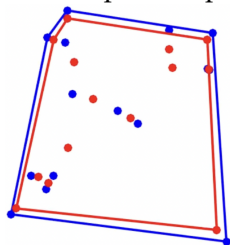
Soit z tel que $P'(z) = 0$. Si $P(z) = 0$ alors z est dans l'enveloppe convexe de $P(X)$, sinon

$$0 = \sum_{k=1}^r \frac{n_k}{z - \mu_k} = \sum_{k=1}^r \frac{z - \mu_k}{|z - \mu_k|^2} \implies z = \frac{\sum_{k=1}^r \mu_k n_k |z - \mu_k|^2}{\sum_{k=1}^r n_k |z - \mu_k|^2}$$

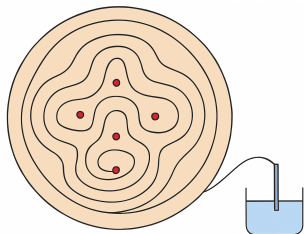
donc z est un barycentre à coefficients strictement positifs des μ_k

le théorème de Gauss-Lucas

Un exemple cité par Florensky est le théorème de Gauss-Lucas



Théorème de Gauss-Lucas : Soit $P(z)$ un polynôme non constant à coefficients complexes. Alors **tout zéro de** $P'(z) = dP(z)/dz$ appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble des zéros de $P(z)$



Dans son article Félix Lucas donne une interprétation électrostatique du théorème

le théorème de Gauss-Lucas

ALGÈBRE PHYSIQUE. — *Détermination électrique des racines réelles et imaginaires de la dérivée d'un polynôme quelconque.* Note de M. **FÉLIX LUCAS**, présentée par M. Jordan.

» *Les points nodaux des courbes équipotentielles se produisent sur les points racines du polynôme dérivé $F'(z)$.*

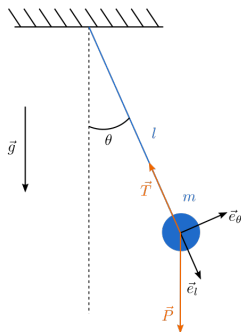
» Ajoutons qu'il est possible de confier à l'électricité elle-même le soin de tracer les courbes équipotentielles, en recourant à l'ingénieuse méthode électrolytique que le D^r A. Guébhard a décrite en 1881 et dont il a fait beaucoup d'applications heureuses. Une plaque mince, en métal poli, circulaire et d'un grand rayon, étant isolée et immergée dans une solution saline convenablement choisie, on prendra pour électrode positive une surface cylindrique dont le bord circulaire libre viendra presque affleurer le contour de la plaque, et pour électrode négative un faisceau de fils métalliques dont les pointes arriveront tout près des points M. Les anneaux colorés, bientôt obtenus par suite du dépôt électrolytique, fourniront un diagramme des lignes équipotentielles et indiqueront les positions cherchées des points M'.

Part III

Les mathématiques au service de la physique

Le pendule : période

L'énergie totale du système est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle d'attraction de la bille par la Terre



$$E = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}(t))^2 + mgl(1 - \cos(\theta(t)))$$

On écarte la bille d'un angle θ_0

$$E = mgl(1 - \cos(\theta_0))$$

On a donc l'équation du mouvement, en utilisant $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ et introduisant

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$(\dot{\theta}(t))^2 = \frac{16\pi^2}{T_0^2} \left[\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \right]$$

Le pendule : fonction spéciale

- ▶ Si $\theta_0 < 180^\circ$ le pendule oscille avec pour période

$$T = \frac{T_0}{2} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)}} = T_0 K\left(\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)$$

- ▶ Si $\theta_0 > 180^\circ$ le pendule tournoie, la période pour faire un tour

$$T = \frac{T_0}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} K\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}\right)$$

Ces périodes sont données par une intégrale elliptique selon la notation trigonometrique de Legendre

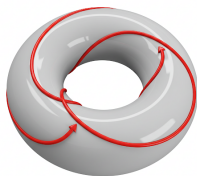
$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)}}; \quad \sin(\theta_0/2) \sin(\phi) = \sin(\theta/2)$$

Le pendule : courbe elliptique

Suivant Carl Jacobi posons

$$x(t) = \sin(\phi(t)); \quad y(t) = \cos(\phi(t)) \frac{d\phi(t)}{dt}$$

L'équation du mouvement du pendule s'inscrit alors sur une courbe elliptique



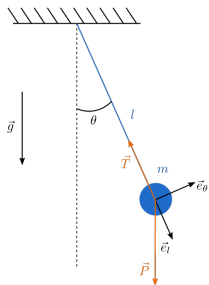
$$y(t)^2 = (1 - x(t)^2)(1 - k^2 x(t)^2); \quad k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

et la période du pendule est donnée par

$$T(k) = T_0 \int_C \frac{dx dy}{y^2 - (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}$$

L'intégration est selon un cycle $\mathcal{C}$ sur le tore associé au pendule

Le pendule : courbe elliptique



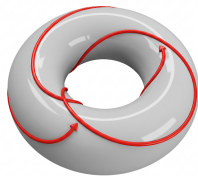
On voit donc apparaître dans un cas physique simple l'apparition d'une géométrie algébrique non triviale : un tore

La mesure expérimentale de la période fournit le paramètre du tore (sa structure complexe)

La période du pendule $T(k)$ satisfait l'équation différentielle du second ordre

$$\left[k(1-k^2) \frac{d^2}{dk^2} + (1-3k^2) \frac{d}{dk} - k \right] T(k) = 0$$

qui est l'équation de Picard-Fuchs associée à la famille de courbes elliptiques associées au tore



Périodes

La période du pendule est donnée par l'intégrale sur un cycle d'une forme différentielle rationnelle

$$T(k) = T_0 \int_C \frac{dx dy}{y^2 - (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}$$

Considérons un autre cas

$$I_0 = \frac{1}{i\pi} \oint \frac{dx dy}{y^2 - (1 - x^2)} = \oint_C \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}; \quad I(z) = \int_0^z \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

On a que

$$\frac{d \arcsin(z)}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}; \quad \sin(I(z) + I_0) = z$$

D'ailleurs Gauss a évalué

$$I_0 = 2\pi$$

De manière générale on considère les intégrales de périodes telles que définies par Kontsevich et Zagier¹

$$\int_{\Delta} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \cdots dx_n$$

- ▶ $f(x_1, \dots, x_n)$ et $g(x_1, \dots, x_n)$ polynômes homogènes dans les variables $x_1, \dots, x_n$ de $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$
- ▶ Δ domain d'intégration dans $\mathbb{R}^n$ défini par des inégalités polynomiales avec des coefficients rationels
- ▶ L'intégrale est convergente

¹M. Kontsevich and D. Zagier, Periods, in Mathematics Unlimited : 2001 and Beyond, Springer, 2001

Périodes : exemples

Quelques exemples d'intégrales de périodes

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} dx$$

$$\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\zeta(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} = \int_{[0,1]^n} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{1 - x_1 \cdots x_n}$$

$$\log(a) = \int_1^a \frac{dt}{t}$$

De la théorie des nombres à la géométrie algébrique

Les périodes sont des nombres et il est souvent utile d'avoir un paramètre pour relier les propriétés de ces nombres à une géométrie algébrique

En reconnaissant que ces nombres sont donnés par des intégrales de formes différentielles intégrées sur un cycle d'une variété algébrique, on accède à des propriétés non triviales.

Considérons $\zeta(3)$ dont Roger Apéry en 1978 a donné la preuve de l'irrationalité en utilisant des séries.

De la théorie des nombres à la géométrie algébrique

Les périodes sont des nombres et il est souvent utile d'avoir un paramètre pour relier les propriétés de ces nombres à une géométrie algébrique

En reconnaissant que ces nombres sont donnés par des intégrales de formes différentielles intégrées sur un cycle d'une variété algébrique, on accède à des propriétés non triviales.

Considérons $\zeta(3)$ dont Roger Apéry en 1978 a donné la preuve de l'irrationalité en utilisant des séries.

Considérons plutôt²

$$I_{\Theta}(t) = \iiint_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x_1+x_2+x_3)(1+x_1^{-1}+x_2^{-1}+x_3^{-1})-t} \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \frac{dx_3}{x_3}$$

telle que

$$I_{\Theta}(0) = 7\zeta(3)$$

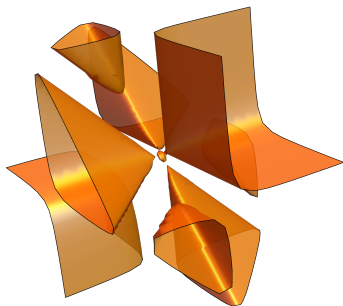
²S. Bloch, M. Kerr, P. Vanhove, "A Feynman integral via higher normal functions", Compos.Math. 151 (2015) 2329, [arXiv:1406.2664]

Période et surface K_3

$$I_{\Theta}(t) = \iiint_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x_1+x_2+x_3)(1+x_1^{-1}+x_2^{-1}+x_3^{-1})-t} \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \frac{dx_3}{x_3}$$

Cette intégrale satisfait l'équation différentielle

$$\left(t^2(t-4)(t-16) \frac{d^3}{dt^3} + 6t(t^2-15t+32) \frac{d^2}{dt^2} + (7t^2-68t+64) \frac{d}{dt} + t-4 \right) I_{\Theta}(t) = -24$$



Le lieu singulier est une surface K_3

$$(1+x_1+x_2+x_3)(1+x_1^{-1}+x_2^{-1}+x_3^{-1}) = t$$

une variété complexe en quatre dimensions réelles qui doit son nom à André Weil car ces surfaces sont des "variétés" qui sont aussi "belles et difficiles" à comprendre que le sommet d'une montagne.

Période et surface K_3

$$I_{\Theta}(t) = \iiint_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x_1+x_2+x_3)(1+x_1^{-1}+x_2^{-1}+x_3^{-1})-t} \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \frac{dx_3}{x_3}$$

Cette intégrale satisfait l'équation différentielle

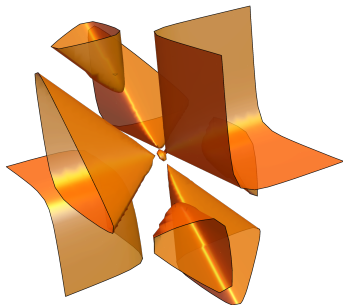
$$\left(t^2(t-4)(t-16) \frac{d^3}{dt^3} + 6t(t^2-15t+32) \frac{d^2}{dt^2} + (7t^2-68t+64) \frac{d}{dt} + t-4 \right) I_{\Theta}(t) = -24$$

Le lieu singulier est une surface K_3

$$(1+x_1+x_2+x_3)(1+x_1^{-1}+x_2^{-1}+x_3^{-1}) = t$$

On a donc que $\zeta(3)$ apparaît comme la valeur spéciale $t=0$ d'une famille d'intégrales de périodes d'une surface K_3 . On a donc géométrisé $\zeta(3)$.

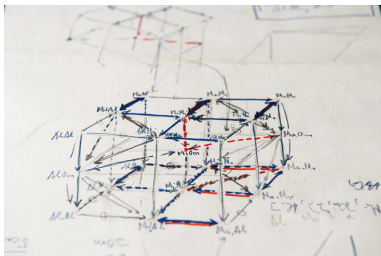
Les récurrences d'Apéry apparaissent en examinant le développement en séries des solutions (Beukers)



Périodes et motifs

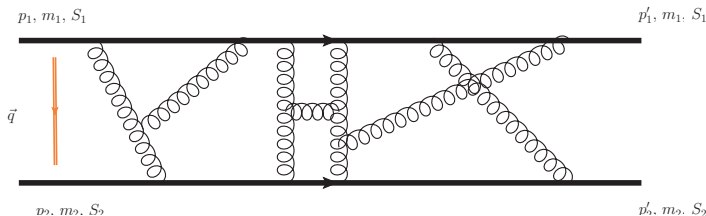
Les intégrales de périodes fournissent un lien entre la théorie des nombres, les formes modulaires et la géométrie algébrique.

Les équations différentielles qu'elles satisfont sont des équations dites Picard-Fuchs ou systèmes différentiels de Gauss-Manin. Elles sont obtenues par des méthodes de géométrie algébrique et sont au cœur de l'approche utilisant les motifs de Grothendieck et leur extension par Deligne, Bloch et autres.



Selon la philosophie développée par Grothendieck les « intégrales de périodes motiviques » sont des nombres complexes calculés par des intégrales qui capturent les propriétés cohomologiques (des invariants topologiques) des variétés algébriques. Les motifs sont censés être les « briques élémentaires » de la géométrie algébrique.

Géométrie algébrique et interaction fondamentales



Les physiciens ont compris que les phénomènes physiques en physique des particules ou de la gravitation d'Einstein sont exprimables par des intégrales de période de la forme

$$\int_C \frac{U(x_1, \dots, x_n)}{P(x_1, \dots, x_n; t)} dx_1 \cdots dx_n$$

où les degrés d'homogénéité en les variables $x_1, \dots, x_n$ sont relié à l'ordre en perturbation des calculs et le nombre de variables au nombres d'interaction virtuelles

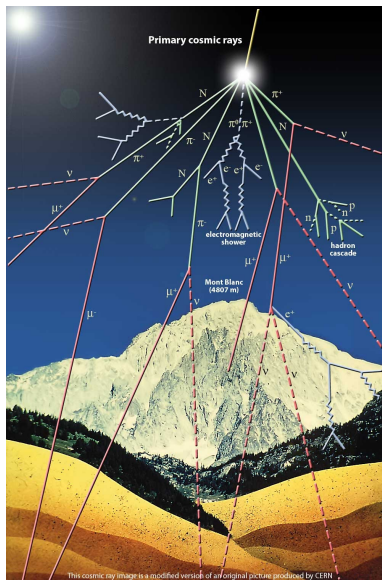
Géométrie algébrique et interaction fondamentales

Selon la logique identifiées avec le mouvement du pendule, l'identification de la géométrie algébrique associée au lieu singulier et les techniques de théorie de Hodge permettent de déterminer les équation différentielles des observables physiques.

Eric Pichon-Pharabod a développé pendant sa thèse un algorithme efficace, <https://github.com/ericpipha/lefschetz-family>, pour calculer numériquement les périodes de variétés d'hypersurfaces projectives et surface elliptic sur $\mathbb{P}^1$ avec des bornes rigoureuses certifiées

On peut donc ainsi classer, comprendre et calculer les amplitudes quantiques en les rattachant à des objets universels de la géométrie algébrique et de la théorie des nombres car ces intégrales sont contrôlées par la catégorie des motifs de Grothendieck et leur extensions

Géométrie algébrique et physique des particules



Le muon est une particule élémentaire de masse 207 fois la masse de l'électron et de charge électrique positive.

Les muons furent découverts par Carl David Anderson et son assistant Seth Neddermeyer, au Caltech, en 1936, alors qu'ils travaillaient sur les rayons cosmiques. Carl Anderson reçoit le prix Nobel en 1938

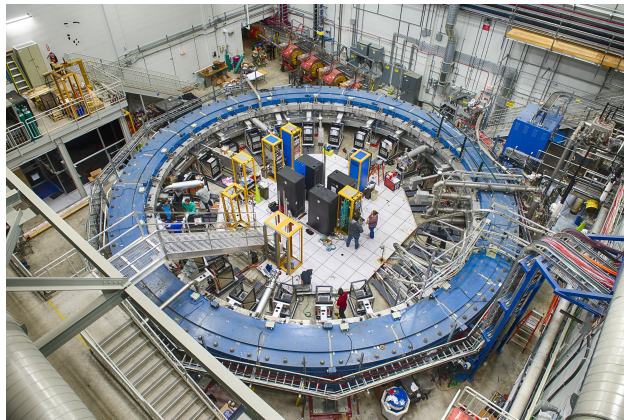


En mécanique quantique, le facteur de Landé est une grandeur physique sans dimension qui permet de relier le moment magnétique au moment cinétique d'un état quantique.

$$\vec{\mu}_\mu = \pm g_\mu \frac{e}{2m_\mu} \vec{S}$$

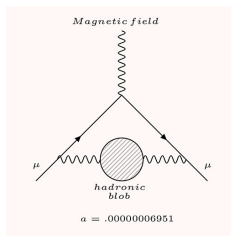
Le facteur g_μ dépend de la manière dont le muon interagit quantiquement avec les autres particules élémentaires

La mesure du facteur $a_\mu = (g_\mu - 2)/2$ par des expériences de physique des particules permet de tester notre compréhension du modèle standard de la physique des particules



En 2020 les calculs théoriques et les mesures expérimentales présentaient un désaccord important

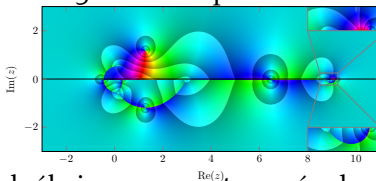
Géométrie algébrique et physique des particules



Les dernières mesures faites par le FERMILAB, publiées le 3 Juin 2025, indiquent que le désaccord principal vient des effets virtuels des interactions fortes

À la précision souhaitée la contribution vient précisément de l'intégrale $I_{\Theta}(t)$ associée à la surface K_3 discutée précédemment

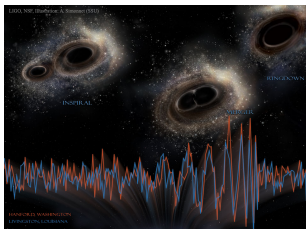
$$I_{\Theta}(t) = \text{[Diagram of a sphere with a horizontal line through its center, representing a geometric surface.]}$$



L'identification de la géométrie algébrique permet une évaluation analytique exacte et une implémentation numérique de haute précision³

³Laurent Lellouch, Alessandro Lupo, Antonin Portelli, Mattias Sjö, Kálmán Szabo, and Pierre Vanhove, "Hadronic vacuum polarization to three loops in chiral perturbation theory", à paraître

Ondes gravitationnelles et fusion de trous noirs



Il y 10 ans, le 14 septembre 2015 les interféromètres LIGO ont détecté les ondes gravitationnelles, les oscillations de la courbure de l'espace-temps produites par deux trous noirs qui s'attirent jusqu'à leur fusion

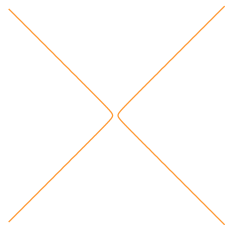
L'amplitude des ondes gravitationnelles émises avant la fusion s'exprime en termes d'intégrales

$$I(\gamma) = \int_C \frac{dx_1 \dots dx_n}{P(x_1, \dots, x_n; \gamma)}$$

fonction du facteur relativiste déterminé par la vitesse relative v entre les deux trous noirs

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Ondes gravitationnelles et fusion de trous noirs



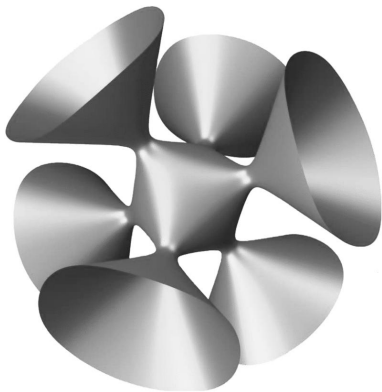
graphe de
 $y^2 = x(x + 1/2)$

Aux premiers ordres apparaissent des
fonction logarithmiques

$$\operatorname{arccosh}(\gamma) = \int_C \frac{dx dy}{y^2 - x(x + 2/(\gamma - 1))}$$

$$\operatorname{arccosh}(\gamma) = \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})$$

Ondes gravitationnelles et fusion de trous noirs



Aux ordres suivants des surfaces K_3 apparaissent

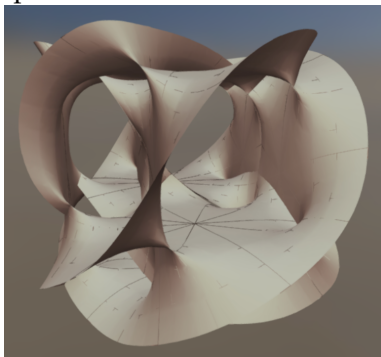
$$P_C^{K_3}(\gamma) = \int_C \frac{dx_1 dx_2 dx_3 dx_4}{P(x_1, x_2, x_3, x_4; \gamma)}$$

où $P(x_1, x_2, x_3, x_4; \gamma)$ est un polynôme homogène de 4

$$P(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4; \gamma) = \lambda^4 P(x_1, x_2, x_3, x_4; \gamma)$$

Ondes gravitationnelles et fusion de trous noirs

Puis des variétés de type Calabi-Yau 3-fold⁴, un espace mathématique complexe de six dimensions réelles qui est particulièrement "plat" sans courbure de Ricci, tout en ayant des propriétés géométriques particulières.

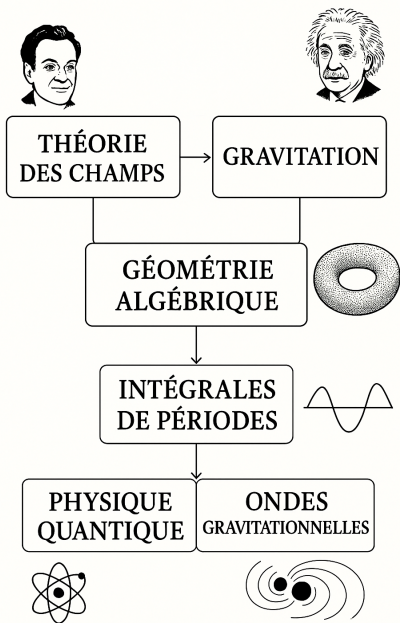


$$p_C^{CY3}(\gamma) = \int_C \frac{dx_1 \cdots dx_5}{P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; \gamma)}$$

cette fois le polynôme est homogène de degree 5 $P(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \lambda x_5; \gamma) = \lambda^5 P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; \gamma)$

⁴Mathias Driesse et al. "Emergence of Calabi-Yau manifolds in high-precision black-hole scattering", Nature 641 (2025) 8063, 603-607, arXiv:2411.11846

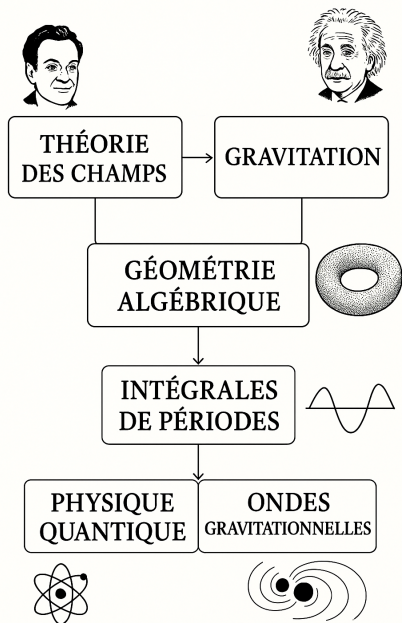




Les périodes sont la « trace numérique » observable et mesurable des variétés algébriques.

Exactement comme la découverte du nombre de π comme le rapport constant entre le périmètre d'un cercle et son diamètre, on pourrait penser à des mesures expérimentales des périodes de variétés algébriques

Ceci fournit une approche géométrique pour caractériser les théories physiques, et comprendre leurs spécificités



Quelles sont les variétés admises par la physique? Parmi toutes surface K_3 seulement des cas particuliers apparaissent dans la physique du Higgs, du muon et de la théorie d'Einstein. Pourquoi?

Les physiciens essaient donc de quantifier la complexité des calculs en analysant la topologie des variétés algébriques attachées à un phénomène physique