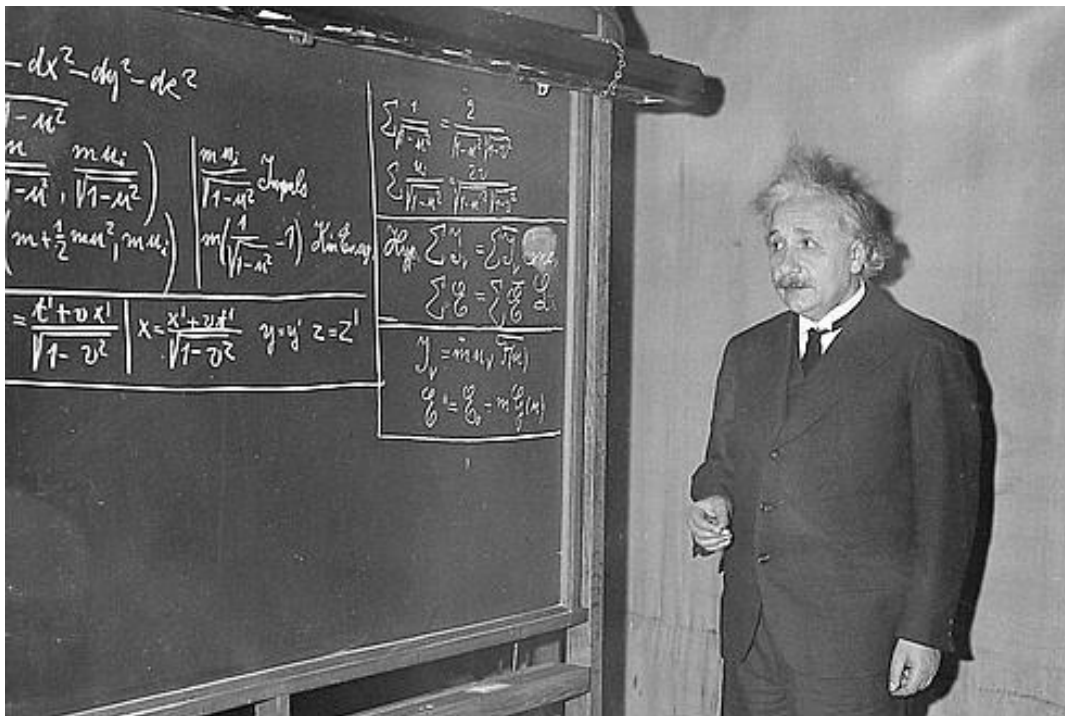


---

# Relativité restreinte et principes variationnels

*Ecole Polytechnique - PHY 431*  
*PC 2012-2013, 2013-2014, 2014-2015*

---



Albert Einstein présentant les équations de la relativité restreinte.

L'article original d'Einstein est « Zur Elektrodynamik bewegter Körper », publié dans *Annalen der Physik*, vol. **17**, 30 juin 1905, p. 891-921.

Le texte intégral en allemand est accessible à l'adresse

[http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1905\\_17\\_891-921.pdf](http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1905_17_891-921.pdf)



# Table des matières

<b>I. Enoncés des petites classes</b>	<b>9</b>
<b>1. PC 1 : Transformations de Lorentz</b>	<b>11</b>
1.1. Rappel de cours . . . . .	11
1.1.1. Contexte historique . . . . .	12
1.2. Le problème d'Einstein . . . . .	12
1.3. Contraction des longueurs et dilatation du temps . . . . .	13
1.3.1. Exercice . . . . .	13
1.3.2. Contexte historique et expérimental . . . . .	13
1.4. Simultanéité . . . . .	14
1.5. Causalité . . . . .	15
1.5.1. Exercice . . . . .	15
1.5.2. Contexte physique . . . . .	16
<b>2. PC 2 : Composition des vitesses et aberration relativiste</b>	<b>19</b>
2.1. Rappel de cours . . . . .	19
2.2. Composition des vitesses . . . . .	19
2.3. Effet d'aberration relativiste . . . . .	20
2.3.1. Effet torche . . . . .	20
2.4. Le paradoxe du mètre incliné . . . . .	20
2.5. Effet Doppler : Un conducteur relativiste . . . . .	21
2.6. Contexte physique : Aberration stellaire . . . . .	22
<b>3. PC 3 : Principes variationnels, équations d'Euler- Lagrange</b>	<b>23</b>
3.1. Rappel de cours . . . . .	23
3.1.1. Multiplicateurs de Lagrange (contraintes globales) . . . . .	24
3.2. Quelques systèmes simples . . . . .	24
3.2.1. Le pendule mobile . . . . .	24
3.2.2. Exemple du référentiel tournant . . . . .	24
3.3. Temps propre et équations de Euler-Lagrange . . . . .	25
3.4. Formule de Beltrami . . . . .	26
3.5. Brachistochrone . . . . .	26
3.6. Caténoïde . . . . .	27
3.7. Contexte historique . . . . .	28
<b>4. PC 3 : Espace-temps et formalisme quadri-dimensionnel</b>	<b>29</b>

## Table des matières

4.1.	Rappel de cours . . . . .	29
4.1.1.	Produit scalaire, élément de longueur . . . . .	29
4.1.2.	Vecteurs et formes linéaires . . . . .	30
4.1.3.	Correspondance vecteur-forme . . . . .	30
4.1.4.	Tenseurs . . . . .	30
4.1.5.	Transformation de Lorentz . . . . .	31
4.1.6.	Groupe de Lorentz . . . . .	32
4.1.7.	Temps propre . . . . .	32
4.2.	Quadri-vecteurs vitesse et accélérations . . . . .	32
4.2.1.	Contexte historique . . . . .	33
4.3.	Cylindre en rotation . . . . .	33
<b>5.</b>	<b>PC 4 : Invariances et lois de conservation ; théorie lagrangienne relativiste</b>	<b>35</b>
5.1.	Lagrangien du champ électromagnétique . . . . .	35
5.2.	Lagrangien d'une particule dans un champ électromagnétique . . . . .	37
<b>6.</b>	<b>PC 5 : Mécanique relativiste</b>	<b>39</b>
6.1.	Rappel de cours . . . . .	39
6.2.	Théorème de la composante nulle . . . . .	40
6.3.	Masse invariante et référentiel du centre de masse . . . . .	41
6.4.	Effet Compton . . . . .	41
6.4.1.	Contexte historique . . . . .	42
<b>6.</b>	<b>PC6 : Relativité et électromagnétisme</b>	<b>45</b>
6.1.	Loi de transformations . . . . .	45
6.2.	Mouvement quand les champs sont parallèles . . . . .	46
6.2.1.	Contexte historique et expérimental . . . . .	46
<b>7.</b>	<b>PC 7 : Mécanique Hamiltonienne</b>	<b>49</b>
7.1.	Rappel de cours . . . . .	49
7.1.1.	Exemples . . . . .	51
7.2.	L'oscillateur harmonique . . . . .	52
7.3.	Mouvement dans un repère tournant . . . . .	52
7.4.	Le cerceau à vitesse angulaire constante . . . . .	53
<b>8.</b>	<b>PC8 : Relativité et gravitation</b>	<b>55</b>
8.1.	Rappels de cours . . . . .	55
8.2.	Géodésiques en relativité générale . . . . .	56
8.3.	Déviations des rayons lumineux . . . . .	58
8.4.	Compléments : les équations d'Einstein . . . . .	59
<b>II.</b>	<b>Enoncés des devoirs à la maison</b>	<b>61</b>
<b>9.</b>	<b>DM1 : Devoir à la maison</b>	<b>63</b>



9.1. Équation d'onde . . . . .	63
9.2. Paradoxe d'Ehrenfest . . . . .	64
9.3. Effet Sagnac . . . . .	64
<b>10. DM2 : Second devoir à la maison</b>	<b>67</b>
1.1. Équation de Maxwell et sources . . . . .	1
1.2. Le pendule double . . . . .	3
1.3. L'atome d'hydrogénoïde . . . . .	3
1.4. Pendule sphérique . . . . .	4
<b>2. Second devoir à la maison (2012)</b>	<b>7</b>
2.1. Équation de Maxwell et sources . . . . .	7
2.2. Effet de seuil . . . . .	9
2.2.1. Contexte historique et expérimental . . . . .	9
2.3. Pendule sphérique . . . . .	10
<b>3. DM2 Second devoir à la maison</b>	<b>11</b>
3.1. Équation de Maxwell et sources . . . . .	11
3.2. Géodésique sur la sphère . . . . .	13
3.3. L'atome d'hydrogénoïde . . . . .	13
3.4. Pendule sphérique . . . . .	14
<b>III. Corrigés des petites classes</b>	<b>17</b>
<b>4. Corrigé PC 1 : Transformations de Lorentz</b>	<b>19</b>
4.2. Le problème d'Einstein . . . . .	19
4.3. Contraction des longueurs et dilatation du temps . . . . .	19
4.4. Simultanéité . . . . .	20
4.5. Causalité . . . . .	22
<b>5. Corrigé PC 2 : Composition des vitesses et aberration relativiste</b>	<b>23</b>
5.1. Composition des vitesses . . . . .	23
5.2. Effet d'aberration relativiste . . . . .	25
5.2.1. Effet torche . . . . .	25
5.3. Le paradoxe du mètre incliné . . . . .	26
5.4. Un conducteur relativiste . . . . .	27
<b>6. Corrigé PC 3 : Principes variationnels, équations d'Euler-Lagrange</b>	<b>29</b>
6.1. Le pendule simple . . . . .	29
6.2. Temps propre et équations de Euler-Lagrange . . . . .	29
6.3. Formule de Beltrami . . . . .	31
6.4. Brachistochrone . . . . .	32
6.5. Caténoïde . . . . .	33

<b>7. Corrigé PC 3 : Espace-temps et formalisme quadri-dimensionnel</b>	<b>37</b>
7.1. Quadri-vecteurs vitesse et accélérations . . . . .	37
7.2. Cylindre en rotation . . . . .	38
<b>8. Corrigé PC 4 : Invariances et lois de conservation ; théorie lagrangienne relativiste</b>	<b>39</b>
8.1. Lagrangien du champ électromagnétique . . . . .	39
8.2. Lagrangien d'une particule dans un champ électromagnétique . . . . .	43
<b>9. Corrigé PC5 : Mécanique relativiste</b>	<b>45</b>
9.1. Théorème de la composante nulle . . . . .	45
9.2. Masse invariante et référentiel du centre de masse . . . . .	46
9.3. Effet Compton . . . . .	47
<b>10. Corrigé PC 6 : Relativité et électromagnétisme</b>	<b>51</b>
10.1. Loi de transformations . . . . .	51
10.2. Mouvement quand les champs sont parallèles . . . . .	53
<b>11. Corrigé PC 7 : Mécanique Hamiltonienne</b>	<b>57</b>
11.1. L'oscillateur harmonique . . . . .	57
11.2. Mouvement dans un repère tournant . . . . .	58
11.3. Le cerceau à vitesse angulaire constante . . . . .	59
<b>12. Corrigé PC8 : Relativité et gravitation</b>	<b>63</b>
12.1. Géodésiques en relativité générale . . . . .	63
12.2. Déviation des rayons lumineux . . . . .	65
<b>IV. Corrigés des devoirs à la maison</b>	<b>69</b>
<b>13. Correction du premier devoir à la maison</b>	<b>71</b>
13.1. Équation d'onde . . . . .	71
13.2. Paradoxe d'Ehrenfest . . . . .	76
13.3. Effet Sagnac . . . . .	77
<b>14. Corrigé du second devoir à la maison</b>	<b>81</b>
14.1. Équation de Maxwell et sources . . . . .	81
14.2. Le pendule double . . . . .	86
14.3. L'atome d'hydrogénoïde . . . . .	88
14.4. Pendule sphérique . . . . .	90
<b>15. Corrigé du second devoir à la maison (2012)</b>	<b>93</b>
15.1. Équation de Maxwell et sources . . . . .	93
15.2. Effet de seuil . . . . .	98
15.2.1. Contexte historique et expérimental . . . . .	100

15.3. Pendule sphérique . . . . .	100
<b>16. Corrigé du second devoir à la maison</b>	<b>103</b>
16.1. Équation de Maxwell et sources . . . . .	103
16.2. Géodésique sur la sphère . . . . .	108
16.3. L'atome d'hydrogénoïde . . . . .	109
16.4. Pendule sphérique . . . . .	111
 <b>V. Suppléments</b>	 <b>115</b>
<b>17. Suppléments</b>	<b>117</b>
17.1. Vitesse, célérité et rapidité . . . . .	117
17.1.1. Correction : Vitesse, célérité et rapidité . . . . .	117
17.2. Champ électromagnétique et électrodynamique non linéaire . . . . .	118
17.2.1. Contexte historique . . . . .	119
17.3. Effet Doppler-Fizeau transverse . . . . .	119
17.4. Le cylindre en rotation . . . . .	120
17.5. Particule uniformément accélérée . . . . .	120
17.5.1. Effet Doppler-Fizeau . . . . .	121
17.6. Calcul tensoriel . . . . .	122
17.7. Création de paires . . . . .	123
17.8. Collision élastique de deux protons . . . . .	124
17.9. Effet Tcherenkov . . . . .	124
17.10. Mouvement dans un potentiel central . . . . .	125
17.11. Le paradoxe de la perche et du hangar . . . . .	127
17.11.1. Solution . . . . .	127
17.12. Objets de déplaçant plus vite que la lumière . . . . .	127
17.12.1. Correction . . . . .	128
17.12.2. Contexte physique . . . . .	129

## *Table des matières*

Première partie .

Enoncés des petites classes



# 1. PC 1 : Transformations de Lorentz

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 4 novembre 2014

## 1.1. Rappel de cours

Le postulat de la constance de la vitesse de la lumière  $c$  permet de construire la loi de transformation entre les coordonnées de deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  en mouvement relatif.

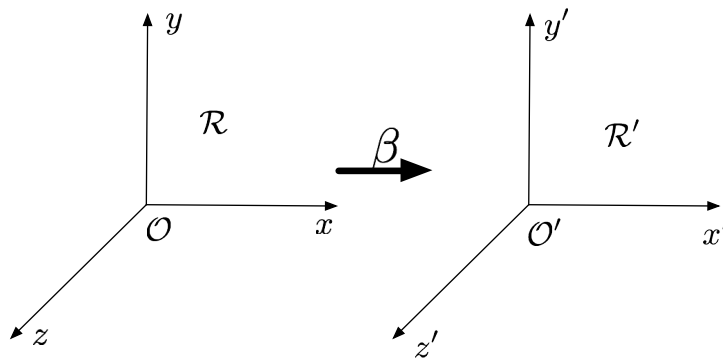


FIGURE 1. – référentiels en mouvement relatif.

Si on note  $(t, x, y, z)$  et  $(t', x', y', z')$  les coordonnées d'un événement dans chacun de ces référentiels de telle sorte que l'événement de coordonnées  $(0, 0, 0, 0)$  coïncide dans les deux référentiels. Si le référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplace par rapport à  $\mathcal{R}$  avec la vitesse réduite  $\beta$  le long de l'axe  $Ox$ , selon le schéma 1, alors les coordonnées dans  $\mathcal{R}'$  s'obtiennent par l'application de la transformation de Lorentz spéciale :

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x), \\ x' &= \gamma(-\beta ct + x), \\ y' &= y \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{1}$$

## 1. PC 1 : Transformations de Lorentz

avec  $\gamma$  le facteur de boost de Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (2)$$

Cette transformation prend la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda(v) \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \text{avec} \quad \Lambda(v) := \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Alors

$$\det \Lambda(v) = 1 \quad (4)$$

La transformation inverse est alors

$$\Lambda(v)^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda(-v) \quad (5)$$

Plus généralement, les transformations spéciales de Lorentz forment un groupe à un paramètre. Elles sont représentées par des matrices unimodulaires  $\Lambda \in SO(1, 3)$ .

### 1.1.1. Contexte historique

En 2012 nous avons commémoré le centenaire de la mort d'Henri Poincaré (1854-1912, X1873). Henri Poincaré a contribué au développement de la théorie de la relativité restreinte. Max Born indique que la théorie de la relativité « a résulté des efforts communs d'un groupe de chercheurs exceptionnels : Lorentz, Poincaré, Einstein, Minkowski ». Wolfgang Pauli dit aussi « Both Einstein and Poincaré, took their stand on the preparatory work of H. A. Lorentz, who had already come quite close to the result, without however quite reaching it. In the agreement between the results of the methods followed independently of each other by Einstein and Poincaré I discern a deeper significance of a harmony between the mathematical method and analysis by means of conceptual experiments (*Gedankenexperimente*), which rests on general features of physical experience. »

## 1.2. Le problème d'Einstein

Quand Einstein était enfant, il se posa la question suivante : un coureur se regarde dans un miroir qu'il tient à bout de bras devant lui. S'il court à une vitesse proche de la vitesse de lumière, pourra-t-il se voir ? Étudier cette question dans le cadre relativiste.



### 1.3. Contraction des longueurs et dilatation du temps

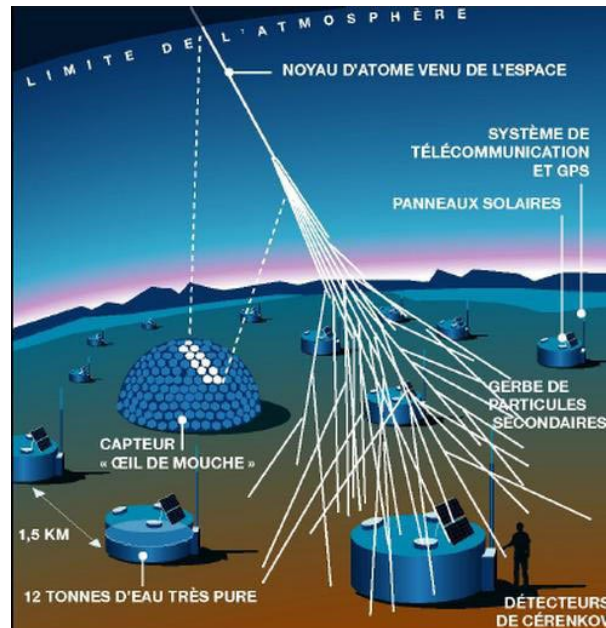


FIGURE 2. – Schéma de l'Observatoire Pierre Auger installé en Argentine et aux états-unis au Colorado

#### 1.3.1. Exercice

À une altitude inférieure à 35 000 m, les muons ont une énergie originelle moyenne de 6 GeV.

- Quelle est la vitesse initiale des muons d'une masse  $m_\mu \simeq 100 \text{ MeV}/c^2$  ? ( 1 GeV =  $10^9$  électron-volts, et 1 MeV =  $10^6$  électron-volts, 1 électron-volt =  $1.602 \cdot 10^{-19}$  Joules =  $1.783 \cdot 10^{-36} \text{ kg } c^2$ ,  $c = 299792458 \text{ m/s}$ .)
- Avec une durée de vie de  $\tau_0 \simeq 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  quelle est la distance maximale parcourue dans le cadre de la cinématique Galiléenne ?
- Dans le référentiel du détecteur, quelle est leur durée de vie ?
- Quelle est la distance parcourue par le muon dans le référentiel du détecteur ?
- Quelle est l'interprétation de ces résultats du point de vue du muon ?

#### 1.3.2. Contexte historique et expérimental

Les rayons cosmiques, particules chargées très énergétiques, interagissent avec l'air présent dans la haute atmosphère. Il y a alors formation de particules, comme des

## 1. PC 1 : Transformations de Lorentz

pions qui se désintègrent en muons et neutrinos  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ . Les pions ont une durée de vie faible de l'ordre de la nanoseconde. La désintégration se produit dans la haute atmosphère à une altitude de quelques dizaines de kilomètres.

Les muons ont la même charge que celle de l'électron, ils sont environ 200 fois plus lourd avec une masse de  $m_\mu \simeq 105.66 \text{ MeV}/c^2$  (avec  $c = 299792458 \text{ m/s}$ ). Leur durée de vie est de  $\tau_0 = 2.197 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ . Ils sont sensible aux interactions faibles mais pas aux interactions fortes. Ceux sont les particules chargées les plus nombreuses au niveau de la mer. Comme toute particule chargée, les muons perdent de l'énergie par ionisation mais interagissent très peu avec la matière. D'une énergie originelle de 6 GeV les muons ont une énergie d'environ 4 GeV au niveau de la mer. Les muons furent découverts par Carl David Anderson (Nobel 1936) et Seth Neddermeyer en 1936, alors qu'ils travaillaient sur les rayons cosmiques.

La détection des muons cosmiques confirme la théorie de la relativité restreinte, car dans le cadre de la cinématique Galiléenne un muon ne devrait jamais être observé au niveau du sol.

Avec votre téléphone portable vous pouvez participer à la détection de rayons cosmiques en utilisant l'application DECO disponible à cette adresse <http://wipac.wisc.edu/deco>

### 1.4. Simultanéité

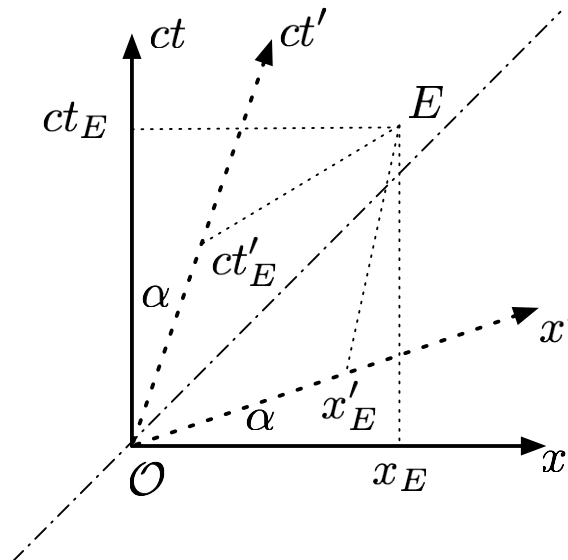


FIGURE 3. – Diagramme de Minkowski

On veut montrer qu'une transformation de Lorentz peut être visualisée par un

diagramme d'espace-temps, ou diagramme de Minkowski,<sup>1</sup> représenté en figure 3.

Soit un référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplaçant à une vitesse réduite  $\beta$  par rapport un référentiel  $\mathcal{R}$ , selon la figure 1.

- a) Montrer que le diagramme de la figure 3 correspond bien à la représentation des axes  $(\mathcal{O}x', \mathcal{O}t')$  dans le référentiel  $(\mathcal{O}x, \mathcal{O}t)$  après transformation de Lorentz. Quelles sont les pentes des nouveaux axes ? Quelle est l'interprétation géométrique ?
- b) Identifier la trajectoire des rayons lumineux sur le diagramme. Vérifiez que l'équation définissant la trajectoire des rayons lumineux est invariante sous transformation de Lorentz.
- c) Quelles sont les lignes de simultanéité dans chacun des référentiels ?
- d) Montrez que les transformations de Lorentz ne préservent pas la chronologie des événements. (La causalité est bien sûr préservée.)

Le diagramme de Minkowski ne traite pas symétriquement les deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , et les unités de longueur sur les axes des deux diagrammes ne sont pas identiques. Ce problème est dû à une représentation euclidienne d'une géométrie hyperbolique. Nous allons voir comment palier à ces défauts.

- e) Montrez que l'unité de longueur de diagramme  $\mathcal{R}$  et reliés à celle du diagramme  $\mathcal{R}'$  par le facteur d'échelle

$$\epsilon = \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}}. \quad (6)$$

- f) En déduire par une construction graphique la relation de dilatation des durées entre les deux référentiels.

## 1.5. Causalité

### 1.5.1. Exercice

Le diagramme de la figure 4 représente les cônes de lumière passé et futur d'un observateur situé à l'origine.

- a) Vérifier l'interprétation de ces cônes en montrant (graphiquement) que tout événement dans le futur (ou le passé) de l'observateur situé à l'origine sont contenus dans les cônes.

---

1. Ces diagrammes ont été introduits par Hermann Minkowski en 1908. Hermann Minkowski (1864 - 1909) est un mathématicien allemand. Il enseigne à Albert Einstein lors de la scolarité de celui-ci à l'École Polytechnique Fédérale de Zürich entre 1896 et 1900.

## 1. PC 1 : Transformations de Lorentz

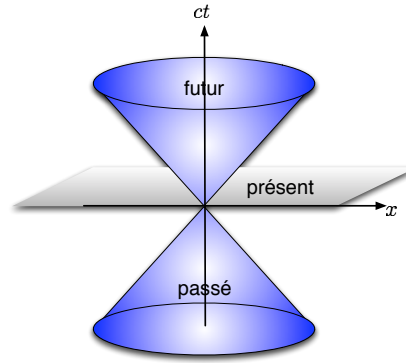


FIGURE 4. – Diagramme de causalité représentant les cônes de lumières passé et futur d'un observateur situé à l'origine.

Un tachyon est une particule hypothétique qui peut se déplacer plus vite que la vitesse de la lumière.

- b) En utilisant la formule pour l'énergie  $E = \gamma mc^2$ , conclure que la masse au repos d'un tachyon est imaginaire.

On considère maintenant un observateur  $\mathcal{R}'$  évoluant à une vitesse réduite  $\beta' < 1$  selon l'axe ( $\mathcal{O}x$ ) du référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$ . Après un temps  $t'$ , il émet un signal à une vitesse réduite  $\beta$ . Dès réception du signal un observateur fixe attaché au référentiel  $\mathcal{R}$  émet un signal à une vitesse réduite  $\beta$  vers  $\mathcal{R}'$ . On supposera que l'origine du référentiel  $\mathcal{R}$  correspond au moment de réception du signal.

- c) Déterminer le temps de réception  $t_{\text{réception}}$  du signal de réponse dans le référentiel  $\mathcal{R}'$
- d) Étudiez le comportement du temps de réception en fonction des vitesses  $\beta$  du signal et de la vitesse  $\beta'$  de l'observateur en mouvement.
- i) Que se passe-t-il pour un signal avec une vitesse inférieure à celles de la lumière  $\beta < 1$  ?
  - ii) Que se passe-t-il pour un signal évoluant à la vitesse de la lumière  $\beta = 1$  ?
  - iii) Que se passe-t-il dans le cas d'un signal tachyonique avec  $\beta > 1$ . Montrer qu'il existe une configuration des vitesses  $\beta$  et  $\beta'$  telle que  $t_{\text{réception}} < 0$ . Quelle est l'interprétation de ce résultat ?

### 1.5.2. Contexte physique

La propagation de particules à des vitesses supérieures à celle de la lumière n'est pas interdite par le formalisme mathématique. La causalité est une hypothèse physique qui doit être imposée.

La théorie impose que tout signal physique se propage à une vitesse inférieure au paramètre limite  $c$  qui peut différer de la vitesse de la lumière dans un milieu différent du vide. Par exemple l'effet Tcherenkov responsable de la couleur bleu des piscines des réacteurs nucléaires est due à un flash de lumière provoqué par une particule chargée se déplaçant dans un milieu avec une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière dans ce milieu, mais avec une vitesse inférieure à  $c$ .

Depuis 1983, la vitesse de la lumière est *fixée* à la valeur  $c = 299\,792\,458\text{m/s}$  par le Bureau international des poids et mesures. L'unité de mètre est obtenue à partir de la mesure de la seconde et la vitesse de la lumière. Grâce aux progrès en physique atomique, la seconde est définie comme « la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux hyperfins  $F = 3$  et  $F = 4$  de l'état fondamental  $6S^{\frac{1}{2}}$  de l'atome de césium 133 ». Ceci permet une détermination de l'unité de longueur plus précise qu'avec un mètre étalon dont la longueur varie selon les conditions extérieures.

1. *PC 1 : Transformations de Lorentz*

## 2. PC 2 : Composition des vitesses et aberration relativiste

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 18 novembre 2014

### 2.1. Rappel de cours

On considère un référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplaçant avec une vitesse uniforme  $\vec{v} = \vec{\beta}c$  par rapport à un autre référentiel  $\mathcal{R}$ . Le vecteur position  $\vec{r}$  peut être décomposé en composantes parallèle à  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{r}_{\parallel} := (\vec{r} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta} / \beta^2$  et une composante orthogonale  $\vec{r}_{\perp} := \vec{r} - \vec{r}_{\parallel}$ . Cette décomposition donne implicitement un choix d'axe de telle sorte que la transformation de Lorentz s'écrit maintenant

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma (ct - \vec{\beta} \cdot \vec{r}), \\ \vec{r}'_{\parallel} &= \gamma (-\vec{\beta}ct + \vec{r}_{\parallel}) \\ \vec{r}'_{\perp} &= \vec{r}_{\perp}. \end{aligned} \quad (1)$$

Si le mouvement se fait selon l'axe  $(\mathcal{O}x)$  la transformation de Lorentz prend la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi(v) & -\sinh \phi(v) & 0 & 0 \\ -\sinh \phi(v) & \cosh \phi(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad (2)$$

avec la rapidité  $\phi(\beta)$  donnée par

$$\cosh \phi(\beta) = \gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \sinh \phi(\beta) = \gamma(\beta) \beta; \quad \tanh \phi(\beta) = \beta. \quad (3)$$

### 2.2. Composition des vitesses

On considère deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  en mouvement uniforme relatif à la vitesse  $\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = c\vec{\beta}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ . Soit un mobile  $\mathcal{M}$  en mouvement avec une vitesse  $\vec{v}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'} = c\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'}$  arbitraire par rapport au référentiel  $\mathcal{R}'$ . On suppose que les axes de  $\mathcal{R}'$  sont parallèles à ceux de  $\mathcal{R}$ .

- a) On suppose que le mouvement du référentiel  $\mathcal{R}'$  se fait selon l'axe  $(\mathcal{O}x)$  du référentiel  $\mathcal{R}$ . Donnez l'expression de la vitesse  $\vec{v}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}} = c\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}}$  du mobile par rapport

## 2. PC 2 : Composition des vitesses et aberration relativiste

au référentiel  $\mathcal{R}$ .

- b) La rapidité  $\phi(v_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})$  est définie par  $\tanh \phi(v_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}) = \beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = v_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}/c$ .  
Montrer que la rapidité est additive par composition des vitesses.
- c) Exprimer le facteur  $k_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \sqrt{(1 + \beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})/(1 - \beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})}$  de l'effet Doppler relativiste en fonction de la rapidité. En déduire le comportement de  $k$  sous la composition des vitesses.
- d) Généraliser au cas où la vitesse relative des deux référentiels est arbitraire.
- e) Vérifier que si le mobile  $\mathcal{M}$  se déplace à la vitesse de la lumière par rapport  $\mathcal{R}'$  alors il se déplace aussi à la vitesse de la lumière par rapport à  $\mathcal{R}$ .

## 2.3. Effet d'aberration relativiste

### 2.3.1. Effet torche

L'effet torche est un effet d'aberration des rayons lumineux conséquence curieuse de la relativité restreinte. L'image d'un objet est déformée par suite du mouvement de l'observateur.

Un observateur  $\mathcal{O}$  situé à l'origine du référentiel  $\mathcal{R}$  voit une source (supposée ponctuelle) se déplacer à la vitesse  $v = c\beta$  le long de  $(\mathcal{O}x)$ . La source rayonne uniformément dans son référentiel propre.

- a) Si l'observateur  $\mathcal{O}$  reçoit les rayons lumineux sous un angle  $\theta$  par rapport à l'axe  $(\mathcal{O}x)$ . Déterminer l'expression l'angle  $\theta$  en fonction de l'angle  $\theta'$  dans le repère en mouvement de la source.
- b) Considérer les limites Galiléenne  $v/c \ll 1$ , et ultra-relativistes  $v/c \gtrsim 1$ .

## 2.4. Le paradoxe du mètre incliné

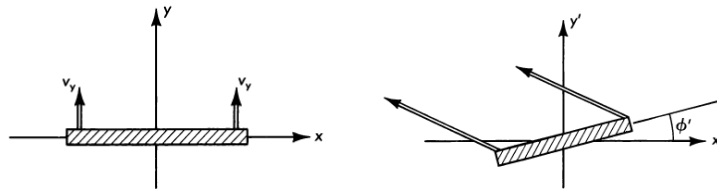


FIGURE 1. – À gauche la règle est dans le référentiel du laboratoire. À droite la règle est dans le référentiel du mobile.

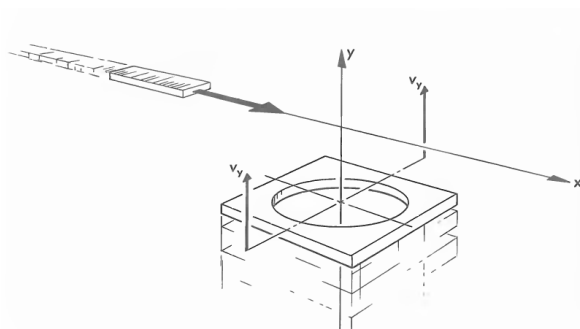


## 2.5. Effet Doppler : Un conducteur relativiste

Une règle de 1 mètre de long parallèle à l'axe ( $\mathcal{O}x$ ) se déplace dans la direction de l'axe ( $\mathcal{O}y$ ) du système du laboratoire à la vitesse  $\beta^y$ . On considère un mobile évoluant à la vitesse  $\beta$  selon l'axe ( $\mathcal{O}x$ ) (voir figure 1). Dans le système du mobile, la règle est inclinée vers le haut par rapport à la partie positive de l'axe ( $\mathcal{O}x'$ ).

- Expliquer ce phénomène sans écrire d'équations. On admettra que le centre de la règle passe au point  $x = y = x' = y' = 0$  à l'instant  $t = t' = 0$ .
- Calculer l'angle d'inclinaison  $\phi'$  du mètre sur l'axe ( $\mathcal{O}x'$ ) du référentiel du mobile

On considère maintenant que cette règle glisse le long de l'axe ( $\mathcal{O}x$ ) du système du laboratoire et se rapproche de l'origine à la vitesse  $\beta_r$ . Une plaque très mince et parallèle au plan ( $x\mathcal{O}z$ ) du système du laboratoire se déplace vers le haut dans le sens de l'axe ( $\mathcal{O}y$ ) à la vitesse  $\beta^y$ . Elle est percée d'un trou circulaire d'un mètre de diamètre centré sur l'axe ( $\mathcal{O}y$ ). Le centre de la règle se trouve à l'origine du système du laboratoire au moment même, mesuré dans le même système, où la plaque ascendante se trouve à  $y = 0$ .



Comme le mètre subit une contraction de Lorentz dans le système du laboratoire, il passera facilement au travers de l'ouverture de la plaque. Il n'y aura donc aucune collision entre eux et ils poursuivront leurs mouvements respectifs.

Mais le système du mobile où il se trouve au repos, le mètre ne subit aucune contraction et c'est au contraire le trou de la plaque qui subit une contraction de Lorentz. Le mètre qui a toute sa longueur ne pourra donc pas passer au travers du trou de la plaque qui s'est contracté. Il devrait se produire une collision.

- Résoudre ce paradoxe en expliquant si il y aura collision ou pas.

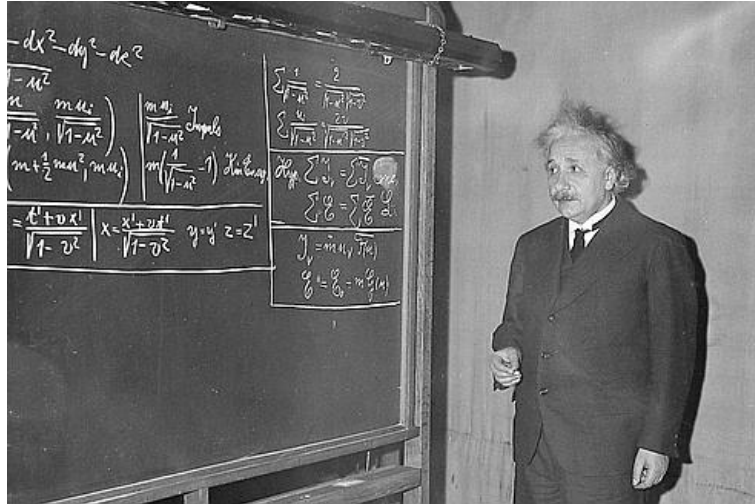
## 2.5. Effet Doppler : Un conducteur relativiste

Une anecdote apocryphe raconte l'histoire d'un physicien arrêté pour ne pas avoir respecté un feu rouge. Pour éviter de payer une amende le physicien explique que le feu lui est apparu de couleur verte à cause de l'effet Doppler. Après réflexion le policier déchira la contravention pour non respect d'un feu rouge en une contravention pour excès de vitesse.

## 2. PC 2 : Composition des vitesses et aberration relativiste

- a) À quelle vitesse devait conduire le physicien pour que le feu rouge lui apparaisse vert ? La longueur d'onde d'une lumière rouge  $\lambda_{\text{rouge}} \sim 700 \text{ nm}$  et d'une lumière verte  $\lambda_{\text{vert}} \sim 546 \text{ nm}$  (rappel  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$  et  $c = 299792458 \text{ m/s}$ ).

### 2.6. Contexte physique : Aberration stellaire



Les effets d'aberration relativiste ont été calculés par Einstein en 1905 pour la première fois dans son article « Zur Elektrodynamik bewegter Körper », publié dans *Annalen der Physik*, vol. **17**, 30 juin 1905, p. 891-921. Le texte intégral en allemand est accessible à l'adresse [http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1905\\_17\\_891-921.pdf](http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1905_17_891-921.pdf). Une traduction en anglais est accessible à cette adresse <http://www.fourmilab.ch/etexts/einstein/specrel/specrel.pdf>.

Une conséquence intéressante de la formule d'aberration est le mouvement apparent des étoiles dans le ciel avec une période de six mois. Cet effet n'est pas due à la différence de position de la Terre par rapport aux étoiles, car la taille de l'orbite terrestre est négligeable en comparaison à la distance aux étoiles, mais c'est un effet de relativité restreinte due au mouvement de la Terre autour du Soleil. Bien sûr dans le cas du mouvement de la Terre autour du Soleil, le vitesse est de l'ordre de  $30 \text{ km/s}$  et l'effet est purement non-relativiste.

### 3. PC 3 : Principes variationnels, équations d'Euler- Lagrange

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 25 novembre 2014

#### 3.1. Rappel de cours

Un système de mécanique classique est caractérisé par une configuration  $\vec{q}$  évoluant dans un espace  $\mathcal{C}$ .

Par exemple, si le système décrit des particules macroscopiques, une configuration est un vecteur  $\vec{q} = (q_1, \dots, q_m)$  qui décrit l'état du système. Par exemple, pour deux points matériels évoluant dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  la configuration est donnée par les coordonnées des deux points matériels  $\vec{q} = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \in \mathcal{C} \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ . Pour une particule contrainte à évoluer sur une sphère  $S^2$  de rayon  $x_1^2 + x_2^2 = R^2$  alors  $\vec{q} = (x_1, x_2) \in \mathcal{C} \cong S^2$ .

Sous l'effet de forces, le système évolue dans l'espace des configurations  $\mathcal{C}$ . C'est alors un système dynamique.

On considère un système dont le comportement peut être décrit par la trajectoire  $\vec{q}(s)$  où  $q_i(s)$  sont des coordonnées généralisées et  $s$  un paramètre curviligne. On note  $\dot{\vec{q}} := d\vec{q}/ds$  les vitesses généralisées. La fonction de Lagrange  $\mathcal{L}$  (si elle existe) est une fonction indépendante des coordonnées et des vitesses généralisées,  $\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, s)$ .

Le principe de moindre action stipule que lorsque le système suit les équations du mouvement, l'action

$$\mathcal{S} = \int_{\text{début}}^{\text{fin}} ds \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, s) \quad (1)$$

est stationnaire vis-à-vis de toute variation de la trajectoire  $\delta\vec{q}(s)$  qui ne change pas les points de départ et de fin de la trajectoire.

Les équations du mouvement sont obtenues de la manière suivante : on définit le moment généralisé (ou encore appelé moment conjugué) de la variable  $\vec{q}$  par

$$\vec{p} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}}. \quad (2)$$

En composantes cette équation s'écrit

$$p^i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (3)$$

### 3. PC 3 : Principes variationnels, équations d'Euler- Lagrange

La donnée du vecteur configuration  $\vec{q}$  et de son moment conjugué  $\vec{p}$  fournit l'espace des phases.

Les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{q}} \quad (4)$$

où le terme de gauche doit être compris comme une dérivée totale par rapport au paramètre  $s$ . Ce sont les équations d'Euler-Lagrange.

La quantité

$$F^i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (5)$$

est appelée la force généralisée.

#### 3.1.1. Multiplicateurs de Lagrange (contraintes globales)

Quand on doit faire une minimisation sous contraintes globales

$$\mathcal{C}_j(\vec{q}(s), \dot{\vec{q}}(s)) = 0 \quad (6)$$

on peut introduire un multiplicateur de Lagrange  $\lambda_j$  par contrainte, de telle sorte que le Lagrangien prenne la forme,

$$\mathcal{L}(\vec{q}(s), \dot{\vec{q}}(s), \lambda_j) = \mathcal{L}_0(\vec{q}(s), \dot{\vec{q}}(s)) + \sum_j \lambda_j \mathcal{C}_j(\vec{q}(s), \dot{\vec{q}}(s)) \quad (7)$$

où  $\mathcal{L}_0$  est le Lagrangien sans contrainte.

La solution du problème de minimisation est obtenue en écrivant les équation d'Euler-Lagrange pour tout  $\lambda_j$ . Les valeurs de ces paramètres auxiliaires sont déterminées à la fin en résolvant les contraintes  $\mathcal{C}_j(\vec{q}(s), \dot{\vec{q}}(s)) = 0$ .

## 3.2. Quelques systèmes simples

### 3.2.1. Le pendule mobile

On considère un pendule de longueur  $l$  et de masse  $m_2$  suspendu à un point de masse  $m_1$  qui se déplace horizontalement sur un rail (sans frottement). On note  $x$  l'abscisse de  $m_1$  et  $\varphi$  l'angle du pendule avec la verticale. Écrire le lagrangien de ce système.

### 3.2.2. Exemple du référentiel tournant

Le formalisme lagrangien permet d'aborder de façon élégante et efficace de nombreux problèmes d'optimisation et de mécanique analytique. Par exemple, le mouvement d'un objet ponctuel, libre, dans un repère tournant à vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$

### 3.3. Temps propre et équations de Euler-Lagrange

constante. Le lagrangien est donné par<sup>1</sup>

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \vec{v}^2 + m \vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{m}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2, \quad (8)$$

conduisant aux moments et forces généralisés suivants :

$$\vec{p} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = m (\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (9)$$

$$\vec{F} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = m (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} + m \vec{v} \times \vec{\Omega}. \quad (10)$$

La force généralisée est la somme des contributions de la force centrifuge  $\vec{F}_r = m (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}$  et la moitié de la Coriolis  $\vec{F}_c = 2m \vec{v} \times \vec{\Omega}$ .

Les équation du mouvement étant  $d\vec{p}/dt = \vec{F}$  la force de Coriolis provient à parts égales de  $\vec{p}$  et de  $\vec{F}$ . Souvent, les forces d'inertie se manifestent invariablement au travers des moments ou des forces généralisés, selon les coordonnées généralisées adoptées.

### 3.3. Temps propre et équations de Euler-Lagrange

On veut montrer que le mouvement rectiligne-uniforme entre deux événements  $A$  et  $B$  rend extremum le temps propre écoulé entre ces deux événements. Pour cela on considère l'action géodésique suivante

$$\mathcal{S} = \int_{s_A}^{s_B} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu ds, \quad (11)$$

avec  $\dot{x}^\mu := dx^\mu/ds$  et où  $s$  est un paramètre le long de la courbe.

- a) Écrire les équations d'Euler-Lagrange et en déduire le résultat cherché.
- b) Sachant que le temps propre d'une particule est

$$(cd\tau)^2 = (cdt)^2 - (d\vec{x})^2 \quad (12)$$

obtenir le même résultat en calculant l'extrémum du temps propre intégré entre l'instant initial et final.

---

1. Si le référentiel  $\mathcal{R}'$  est en rotation selon l'axe  $Oz$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  alors  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$  et  $\vec{r}' = (x \cos(\Omega t) + y \sin(\Omega t)) \vec{e}_x + (-x \sin(\Omega t) + y \cos(\Omega t)) \vec{e}_y + z \vec{e}_z$ . Donc si  $\vec{v} = d\vec{r}'/dt$  est la vitesse dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  alors la vitesse par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  est  $\vec{V} = \vec{v} + \vec{r}' \times \vec{\Omega}$ . Donc le lagrangien de la particule libre en mouvement dans un référentiel en rotation est obtenue en substituant dans le lagrangien  $\mathcal{L} = \frac{m\vec{V}^2}{2}$  l'expression pour la vitesse  $\vec{V}$ .

### 3.4. Formule de Beltrami

On considère une fonctionnelle de la forme

$$\mathcal{U}(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(y(x), \dot{y}(x), x) dx \quad (13)$$

où  $y$  est une fonction de  $x$  et  $\dot{y} := dy/dx$ . On cherche les configurations  $y(x)$  qui rendent cette fonctionnelle extrémale,  $x_0$  et  $x_1$  étant fixées.

- En étudiant la condition d'extrémalisation de cette fonctionnelle déduire les équations d'Euler-Lagrange.
- On suppose que  $F$  ne dépend pas explicitement de  $x$  (i.e. telle que  $\partial F/\partial x = 0$ ), montrer que la quantité

$$E := \dot{y} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - F \quad (14)$$

est constante pour toute solution  $y$  du problème d'extrémalisation (formule de Beltrami).

- On considère une particule ponctuelle en mouvement unidimensionnel dans un potentiel  $V(x)$  indépendant du temps. Écrire le Lagrangien pour ce système et la formule de Beltrami. Interpréter le résultat.

### 3.5. Brachistochrone

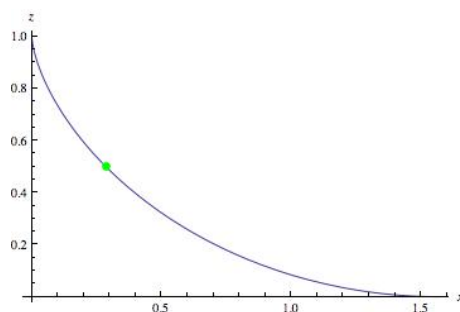


FIGURE 1. – Courbe brachistochrone, du grec « brakhisto » signifiant « le plus court » et de « chronos » signifiant le temps.

On suppose qu'un objet ponctuel  $P$ , lâché du point  $A$  de coordonnées  $(x_A = 0, z_A = h > 0)$  sans vitesse initiale, glisse le long d'un toboggan jusqu'au point  $B$  de coordonnées  $(x_B = d > 0, z_B = 0)$  (voir la figure 1).

- Déterminer le temps de parcours  $T(z)$  comme fonctionnelle de la courbe  $z(x)$  du

toboggan

$$T(z) = \int_0^d f(z, \dot{z}) dx, \quad (15)$$

avec  $\dot{z} := dz/dx$ . Pour cela on utilisera la théorème de conservation de l'énergie du système.

- b) Appliquer la formule de Beltrami pour déterminer la forme de la courbe. Pour cela poser  $\dot{z} := dz/dx = \tan(\theta/2)$ . On obtient un arc de cycloïde.
- c) On place une particule en un point quelconque de la courbe trouvée et on la lâche sans vitesse initiale. Montrer que le temps mis pour atteindre le point le plus bas de la courbe est indépendant du point de départ. On dit que la courbe trouvée est tautochrone.

### 3.6. Caténoïde

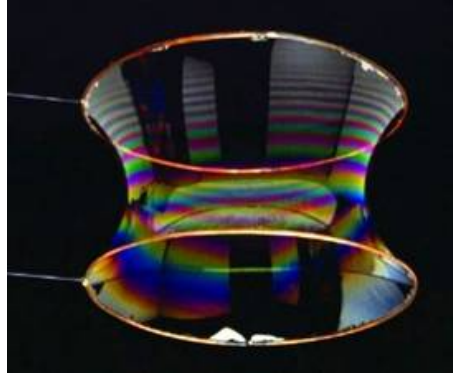


FIGURE 2. – Forme d'une bulle de savon entre deux cercles. La forme prise par la bulle est une caténoïde du latin Catena pour chaîne.

On recherche la forme d'une bulle de savon tendue entre deux cercles de rayon  $R$  placés l'un au dessus de l'autre (voir Fig. 2). À cause de la tension superficielle la forme prise par la bulle est telle que la surface totale est minimale.

- a) Montrer que l'action de ce système peut s'écrire,

$$\mathcal{S} = 2\pi \int_{-h}^h r(z) \sqrt{1 + \dot{r}(z)^2} dz, \quad (16)$$

où  $\dot{r}(z) := dr(z)/dz$ .

- b) Écrire l'équation d'Euler-Lagrange correspondante. Remarquer que  $r(z)/(1 + \dot{r}^2(z))^{1/2}$  est conservée.

### 3. PC 3 : Principes variationnels, équations d'Euler- Lagrange

- c) Montrez que la solution est donnée par  $r = \alpha \cosh((z - \beta)/\gamma)$  où l'on déterminera les constantes  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  en fonction des données du problème.

## 3.7. Contexte historique

En juin 1696 Bernoulli a mis au défi les mathématiciens européens de résoudre le problème de la brachistochrone. Il accorda un délai de six mois pour recevoir la solution, et promit de publier sa propre solution si aucune solution ne lui est communiqué. Le délai des six mois écoulés sans solutions reçues, Bernoulli reçut une lettre de Leibniz indiquant être proche d'une solution et demandant un délai supplémentaire jusqu'à Noël, afin que les mathématiciens français et italiens, informés plus tard, ne puissent pas se plaindre du délai trop court accordé. Bernoulli accepta la suggestion et annonce un délai supplémentaire pour ceux qui n'auraient reçu l'annonce de juin 1696.

Le 29 janvier 1667 à 16h00, Isaac Newton (1643-1727) de retour du « Royal Mint » trouva une copie du problème adressée par Bernoulli. Newton travailla jusqu'à 4h00 du matin pour résoudre le problème. Il envoya sa réponse à Montague, le président de la société Royale, pour que sa solution soit publiée anonymement. La solution de Newton, indique que la courbe est celle d'une cycloïde et fournit une méthode pour la déterminer.

Leibniz et le Marquis de l'Hôpital résolurent le problème de la brachistochrone. Bernoulli put identifier Newton comme l'auteur de la solution anonyme. Il déclara *tanquam ex ungue leonem*, dont la traduction littérale est « on reconnaît le lion à sa griffe », qui signifie que l'on reconnaît l'artiste à sa « patte ».

Vous pouvez lire l'histoire du calcul des variations et du problème de la Brachistochrone dans cet article de James Ferguson "A Brief Survey of the History of the Calculus of Variations and its Applications" <http://arxiv.org/abs/math/0402357>.



## 4. PC 3 : Espace–temps et formalisme quadri-dimensionnel

donnée en 2012 et 2013

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 25 novembre 2014

### 4.1. Rappel de cours

#### 4.1.1. Produit scalaire, élément de longueur

Dans le cadre de la relativité, ni l'espace ni le temps ne sont absolus. L'espace–temps est le contexte naturel où les événements sont repérés par quatre coordonnées, composantes d'un quadrivecteur, le quadrivecteur position

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Si nous dénotons par  $x^\mu$  avec  $\mu = 0, 1, 2, 3$  les composantes de  $\mathbf{X}$ , on souhaite que  $\mathbf{X} = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu e_\mu$  aient les coordonnées données dans (1) selon une base  $\{e_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ .

Nous utiliserons la règle de sommation d'Einstein sur les indices répétés  $\mathbf{X} = x^\mu e_\mu$ . Seront sommés des indices répétés en « haut » et en « bas ».

Si  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  sont deux quadrivecteurs de position le produit scalaire s'écrit

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = x^\mu y^\nu e_\mu \cdot e_\nu, \quad (2)$$

ce produit scalaire devant être égale à l'intervalle relativiste tel que

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = x^0 x^0 - \vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_{\mu=0}^3 (x^\mu)^2 \quad (3)$$

il faut donc que  $\{e_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$  soit une base orthonormée pour le produit scalaire quadri-dimensionnel :

$$e_\mu \cdot e_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad (4)$$

où  $\eta_{\mu\nu}$  sont les composantes du tenseur métrique, diagonal, de signature  $(+, -, -, -)$ . (Nous aurions aussi pu définir le produit scalaire avec la signature  $(-, +, +, +)$ ).

#### 4. PC 3 : Espace-temps et formalisme quadri-dimensionnel

##### 4.1.2. Vecteurs et formes linéaires

Une quadriforme linéaire  $\mathbf{F}$  applique un quadrivecteur  $\mathbf{X}$  sur un réel  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ . Elle peut être développée dans une base  $\{\theta^\mu\}$  :

$$\mathbf{F} = f_\mu \theta^\mu. \quad (5)$$

La base  $\{\theta^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$  duale de  $\{e_\mu\}$  si

$$\theta^\mu(e_\nu) = \delta_\nu^\mu. \quad (6)$$

Dans une telle base

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = f_\mu x^\mu. \quad (7)$$

##### 4.1.3. Correspondance vecteur-forme

Le tenseur métrique  $\eta_{\mu\nu}$  permet d'établir une correspondance (un isomorphisme) entre les vecteurs et les formes linéaires : à chaque vecteur  $\mathbf{X}$  de composantes  $x^\mu$  correspond une forme  $\mathbf{Q}$  de composantes  $q_\mu$  telles que

$$q_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \iff x^\mu = \eta^{\mu\nu} q_\nu, \quad (8)$$

ainsi

$$\mathbf{Q} = q_\mu \theta^\mu = x^\mu e_\mu = \mathbf{X}. \quad (9)$$

La métrique inverse  $\eta^{\mu\nu}$  est telle que

$$\eta_{\nu\lambda} \eta^{\lambda\mu} = \delta_\nu^\mu. \quad (10)$$

Si  $\{x^\mu\} = \{x^0, \vec{x}\}$  sont les composantes  $\mathbf{X}$ , les composantes  $\{q_\mu\}$  de  $\mathbf{Q}$  seront  $\{q_\mu\} = \{x_\mu\} = \{x^0, -\vec{x}\}$ .

À partir de maintenant nous dénoterons les éléments de la base duale  $e^\mu := \theta^\mu$ . Aucun confusion n'est possible car la nature la base est indiquée par la position de l'indice.

##### 4.1.4. Tenseurs

Un tenseur  $\mathbf{T}$ ,  $p$  fois contravariant et  $q$  fois covariant, est un objet géométrique défini dans un espace linéaire, produit direct de  $p$  espaces de vecteurs et  $q$  espaces de formes linéaires. Il s'exprime dans la base naturelle induite par  $\{e_\mu\}$  et  $\{e^\mu\}$  comme suit :

$$\mathbf{T} := T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_p} \otimes e^{\nu_1} \otimes \dots \otimes e^{\nu_q} \quad (11)$$

Le tenseur métrique permet de « monter ou descendre » des indices, c'est-à-dire de relier des tenseurs de rang  $(p, q)$  à des tenseurs de rang  $(p+1, q-1)$  ou  $(p-1, q+1)$ .

#### 4.1.5. Transformation de Lorentz

Une transformation de Lorentz est un changement de base

$$\{e_\mu\} \rightarrow \{e'_\nu = e_\mu(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\} \quad (12)$$

au cours duquel le produit scalaire est inchangé :

$$e_\mu \cdot e_\nu = \eta_{\mu\nu} . \quad (13)$$

En conséquence,

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \quad (14)$$

Cette relation définit le groupe des transformations d'invariance de l'élément  $ds^2 = (ct)^2 - (\vec{x})^2$ .

Au cours d'un changement de base,  $\{e_\mu\} \rightarrow \{e'_\nu = e_\mu(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\}$ , la base duale se transforme au moyen de  $\Lambda : \{e^\mu\} \rightarrow \{e'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu e^\mu\}$ . On parle de transformation contravariante par opposition à la transformation covariante de la base  $\{e_\mu\}$ . Tout objet tensoriel est invariant mais ses composantes se transforment. Par exemple, les composantes d'un quadrivecteur se transforment de manière à satisfaire

$$\mathbf{X} = e_\mu x^\mu = e'_\nu x'^\nu \quad (15)$$

où  $x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu$  ; de même pour une forme avec  $f'_\nu = f_\mu(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$ .

La matrice  $\Lambda(\vec{\beta})$  d'une transformation de Lorentz générale a pour composantes

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma \quad (16)$$

$$\Lambda^0{}_i = -\gamma\beta_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (17)$$

$$\Lambda^i{}_0 = -\gamma\beta^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (18)$$

$$\Lambda^i{}_j = \delta^i_j + \frac{\gamma}{\gamma+1}\beta^i\beta_j. \quad (19)$$

On en déduit alors l'action de cette transformation de Lorentz sur les composantes du quadri-vecteur  $\mathbf{X} : x'^\mu = \Lambda(\vec{\beta})^\mu{}_\nu x^\nu$

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{x}) \\ \vec{x}' &= \vec{x} + \gamma\vec{\beta} \left( \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{\beta} \cdot \vec{x} - x^0 \right) \end{aligned} \quad (20)$$

ou encore la relation inverse  $x^\mu = \Lambda(-\vec{\beta})^\mu{}_\nu x'^\nu$

$$\begin{aligned} x^0 &= \gamma(x'^0 + \vec{\beta} \cdot \vec{x}') \\ \vec{x} &= \vec{x}' + \gamma\vec{\beta} \left( \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{\beta} \cdot \vec{x}' + x'^0 \right) \end{aligned} \quad (21)$$

$\gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}$  est le facteur de Lorentz de cette transformation,  $\vec{v} = \vec{\beta}c$  étant la

#### 4. PC 3 : Espace-temps et formalisme quadri-dimensionnel

vitesse relative des deux référentiels d'inertie où les composantes de  $\mathbf{X}$  sont mesurées.

##### 4.1.6. Groupe de Lorentz

De la même manière que les rotations sont les transformations qui préservent la norme euclidienne, les transformations de Lorentz sont celles qui préservent l'invariant de Lorentz.

En notation matricielles si  $\eta$  est la matrice de composantes  $\eta_{\mu\nu}$  nous avons

$$R R^T = \mathbb{I} \iff R \in SO(3) \quad \text{pour les rotations} \quad (22)$$

$$\Lambda \eta \Lambda^T = \eta \iff \Lambda \in SO(1,3) \quad \text{pour les transformations de Lorentz.} \quad (23)$$

Le groupe  $SO(1,3)$  a quatre composantes caractérisées par  $\det \Lambda = \pm 1$  et  $(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{k=1}^3 (\Lambda^k_0)^2 \geq 1$ . Les transformations de déterminant +1 forment un sous-groupe préservant l'orientation d'espace-temps. C'est le sous-groupe  $SO^+(1,3)$  des transformations propres. Les transformations de Lorentz telles que  $\Lambda^0_0 \geq 1$  forment le sous-groupe orthochrone des transformations préservent le sens d'écoulement du temps. Il est dénoté  $SO^{+\uparrow}(1,3)$ .

##### 4.1.7. Temps propre

Le temps coordonnée est relatif et dépend du référentiel choisi. On définit le temps propre, invariant et attaché à chaque observateur ou mobile. L'élément de temps propre le long d'une ligne d'univers est

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = dt^2 - \frac{d\vec{x}^2}{c^2}. \quad (24)$$

Si  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}$  est le facteur de Lorentz en chaque point de cette ligne, l'élément de temps propre est  $d\tau = dt/\gamma$ . Le temps total mesuré par le mobile le long de sa ligne d'univers, pour relier un point d'espace en  $t_1$  à un autre point en  $t_2$  est

$$\delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma} \quad (25)$$

Comme  $\gamma \geq 1$  ce temps est inférieur ou égal à  $\delta t = t_2 - t_1$ , l'inégalité étant saturée lorsque le mobile est au repos.

## 4.2. Quadri-vecteurs vitesse et accélérations

Le quadri-vecteur accélération  $\mathbf{A}$  est défini comme la dérivée du quadri-vecteur vitesse  $\mathbf{V}$  par rapport au temps propre  $\tau$  :  $\mathbf{A} = d\mathbf{V}/d\tau$ .

- a) Donner l'expression de la quadri-vitesse  $\mathbf{V}$  en fonction de la vitesse spatiale ordinaire dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Calculer la norme du quadri-vecteur vitesse.
- b) Donner alors l'expression de l'accélération dans  $\mathcal{R}$ . Calculer le produit scalaire entre les quadri-vecteurs vitesse et accélération.
- c) On définit le quadri-vecteur d'énergie-impulsion  $\mathbf{P} = m\mathbf{V}$ . Donner les composantes de ce quadri-vecteur, ainsi que  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$ . En déduire l'expression pour l'énergie d'une particule massive relativiste en mouvement.
- d) Que déduire que l'orthogonalité de l'accélération et du quadri-vecteur énergie-impulsion ?

#### 4.2.1. Contexte historique

La formule  $E = mc^2$ , la plus célèbre de la physique moderne du XXème siècle. Elle traduit l'équivalence entre l'énergie et la masse. Albert Einstein a incorrectement démontré cette formule dans son article « Ist die Trägheit eines Körpers von dessen Energieinhalt abhängig ? » (A. Einstein 1905 Annalen der Physik **18** : 639–643) Ce fut Max Planck qui établit correctement cette formule pour la première fois (M. Planck 1908 « Zur Dynamik bewegter Systeme », Annalen der Physik 26 1-34).

### 4.3. Cylindre en rotation

On considère un cylindre de rayon  $\rho$  et de longueur  $L$  en rotation uniforme  $\omega$  autour de son axe ( $\mathcal{O}x$ ) dans le repère inertiel  $\mathcal{R}$ . On considère un référentiel  $\mathcal{R}'$  en mouvement uniforme  $v = \beta c$  selon l'axe ( $\mathcal{O}x$ ).

- a) Montrer que dans  $\mathcal{R}'$  le cylindre apparaît comme un cylindre de rayon  $\rho$  mais de longueur  $L/\gamma$ .
- b) On suppose que la surface du cylindre on été marqués des points de couleur alignés le long du cylindre. Montrer que dans  $\mathcal{R}'$  le cylindre apparaît tordu d'un angle  $\alpha = \gamma\beta\omega/c$  par unité de longueur propre.

#### 4. *PC 3 : Espace-temps et formalisme quadri-dimensionnel*

## 5. PC 4 : Invariances et lois de conservation ; théorie lagrangienne relativiste

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 2 décembre 2014

### 5.1. Lagrangien du champ électromagnétique

On considère un tenseur antisymétrique  $\mathbf{F}$  deux fois contravariant  $F^{\mu\nu}$  dont les composantes s'expriment en fonction de celles d'un quadri-vecteur  $\mathbf{A}$  de composantes  $A^\mu$  selon  $F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ .

a) Montrer que l'on a

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0. \quad (1)$$

Soit un espace Euclidien tridimensionnel équipé du produit scalaire avec une signature  $(-, -, -)$ . Ainsi le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de composantes contravariantes respectives  $v^i$  et  $w^i$  s'écrit  $\vec{v} \cdot \vec{w} = -\sum_{i=1}^3 v^i w^i$ .

b) Écrire les composantes covariantes  $w_i$  en terme des composantes contravariantes  $w^i$ . Réécrire le produit scalaire  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  en utilisant les composantes contravariantes de  $\vec{v}$  et les composantes covariantes de  $\vec{w}$ .

On définit sur cet espace-euclidien un tenseur deux fois contravariant  $f^{ij} = \partial^i v^j - \partial^j v^i$ , puis considère le tenseur complètement antisymétrique  $\epsilon_{ijk}$  tel que  $\epsilon_{123} = 1 = -\epsilon_{213} = -\epsilon_{321}$ . On définit ensuite le tenseur  $w_i$  (une fois covariant)  $w_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}f^{jk}$ .

c) Montrer que  $w_i = \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{v}\right)_i$ . On rappelle que  $\vec{\nabla} := (\partial/\partial x^i = \partial_i = -\partial^i)$ .

Les composantes du champ électromagnétique  $\vec{E} = (E^x, E^y, E^z) = (-E_x, -E_y, -E_z)$  et  $\vec{B} = (B^x, B^y, B^z) = (-B_x, -B_y, -B_z)$  sont reliées à celles du tenseur  $F^{\mu\nu}$  de la façon suivante

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x/c & -E^y/c & -E^z/c \\ E^x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E^y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E^z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

C'est le tenseur de Faraday.

5. PC 4 : Invariances et lois de conservation ; théorie lagrangienne relativiste

d) Montrer que les équations (1) conduisent aux équations de Maxwell homogènes

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

On utilisera que  $\partial^0 := \partial/(c\partial t) = \partial_0$  et la question précédente en démontrant que  $B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}$ .

e) Vérifier que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dérivent de potentiels

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (5)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (6)$$

f) Montrer que ces équations sont invariantes sous les transformations suivantes

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla}\chi \quad (7)$$

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (8)$$

Pour fixer cette ambiguïté on impose la condition de jauge suivante

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (9)$$

On considère maintenant le Lagrangien du champ électromagnétique en présence de matière, tel que l'action prenne maintenant la forme

$$\mathcal{S} = \int \left( -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \varrho\phi + \vec{j} \cdot \vec{A} \right) d^3x dt \quad (10)$$

g) Vérifier l'expression de  $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  en fonction de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  :

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -2 \left( \frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2 \right). \quad (11)$$

h) En utilisant les expressions (5) et (6), écrire les équations de Euler-Lagrange pour les champs  $\phi$  et  $\vec{A}$ .

i) Comment se traduit l'invariance de jauge donnée dans les équations (7) et (8) pour le Lagrangien ?



## 5.2. Lagrangien d'une particule dans un champ électromagnétique

On considère une particule dans un champ électromagnétique extérieur, dont l'action est donnée par

$$\mathcal{S} = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} dt - \int_{t_1}^{t_2} q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) dt \quad (12)$$

- a) Écrire les équations d'Euler-Lagrange dérivant de cette action. On utilisera que  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$ , ainsi que les relations (3) et (4).
- b) En utilisant la relation  $mc^2 = (\mathcal{E}/c)^2 - \vec{p}^2$ , déduire l'équation satisfaite par l'énergie  $\mathcal{E} = \gamma mc^2$  de la particule ?
- c) On introduit le quadri-vecteur énergie-impulsion  $\mathbf{P}$  de composantes  $(\mathcal{E}/c, \gamma m \vec{v})$  où  $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ . Écrire les équations du mouvement en utilisant les composantes du quadri-vecteur  $\mathbf{P}$ , du quadri-tenseur  $\mathbf{F}$  défini dans l'équation (2). On utilisera le temps propre  $\tau$  tel que  $dt = \gamma d\tau$  et le quadri-vecteur vitesse  $\mathbf{V} = \gamma (c, \vec{v})$ .
- d) Montrer que l'on peut exprimer l'action (12) sous une forme explicitement invariante de Lorentz avec des quadri-vecteurs.

5. *PC 4 : Invariances et lois de conservation ; théorie lagrangienne relativiste*

## 6. PC 5 : Mécanique relativiste

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 9 décembre 2014

### 6.1. Rappel de cours

Le quadrivecteur énergie–impulsion d’une particule libre de masse  $m$  et de quadrivitesse  $\mathbf{V}$  est défini par

$$\mathbf{P} = m\mathbf{U}, \quad (1)$$

avec  $\mathbf{U} = \gamma(c, \vec{v})$  dans un référentiel d’inertie. Dans un référentiel d’inertie, les composantes de  $\mathbf{P}$  sont  $(\mathcal{E}/c, \vec{p})$ , où  $\mathcal{E} = \gamma mc^2$  est l’énergie totale de la particule et  $\vec{p}$  est son impulsion. L’énergie cinétique

$$\mathcal{T} = \mathcal{E} - mc^2 \quad (2)$$

car  $mc^2$  est l’énergie au repos. La contrainte physique  $\mathbf{U}^2 = c^2$  implique  $\mathbf{P}^2 = m^2 c^2$  qui, en terme de composantes, s’écrit :

$$\mathcal{E}^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2. \quad (3)$$

Cette relation porte le nom de relation de couche de masse. L’énergie cinétique est donnée par

$$\mathcal{T} = mc^2 \left( \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}} - 1 \right). \quad (4)$$

En cinématique relativiste nous avons (pour  $m \neq 0$ )

$$\mathcal{E} = \gamma mc^2, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (5)$$

et par conséquent

$$\vec{v} \mathcal{E} = \vec{p} c^2 \implies \mathcal{E} = \frac{\sqrt{\vec{p}^2}}{\sqrt{\vec{v}^2}} c^2. \quad (6)$$

Cette dernière relation reste vraie lorsque  $\vec{v}^2 = c^2$ , auquel cas  $\mathcal{E} = \sqrt{\vec{p}^2} c$ . De la relation de couche de masse on déduit alors que  $m = 0$  pour ces particules. Pour une particule de masse nulle  $\mathbf{P} = \frac{\mathcal{E}}{c} (1, \vec{n})$  où  $\vec{n}$  est un vecteur unité selon la direction du mouvement.

## 6. PC 5 : Mécanique relativiste

Au cours d'un processus de collision entre particules

$$a_{(1)} + a_{(2)} \rightarrow b_{(3)} + b_{(4)} + \dots, \quad (7)$$

l'énergie et l'impulsion totales sont conservées. Ceci se formule comme suit :

$$\mathbf{P}_{\text{tot } a} := \sum_i \mathbf{P}_{a(i)} = \sum_i \mathbf{P}_{b(i)} := \mathbf{P}_{\text{tot } b}. \quad (8)$$

Cette conservation est valable dans tous les référentiels d'inertie.

En géométrie minkowskienne, les quadrivecteurs satisfont une inégalité triangulaire. Pour tout couple de quadrivecteurs  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$ , du genre temps, orientés tous deux vers le futur (ou tous deux vers le passé), il vient :

$$\|\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2\| \geq \|\mathbf{P}_1\| + \|\mathbf{P}_2\|. \quad (9)$$

L'inégalité est stricte si un des deux quadrivecteurs (et seulement un) est de genre lumière.

### 6.2. Théorème de la composante nulle

- a) Montrez que si un quadri-vecteur  $\mathbf{A}$  a sa composante temporelle nulle dans tous les référentiels Lorentzien alors le quadri-vecteur est nul.
- b) Montrer que si  $\mathbf{P}$  est un quadri-vecteur de genre temps  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} > 0$  alors il existe un référentiel où ses composantes sont données par  $\mathbf{P} = (P^0, \vec{0})$ . Lorsque  $\mathbf{P}$  est le quadri-vecteur énergie-impulsion d'une particule, ce référentiel est celui où la particule est au repos.
- c) Soit  $\Delta\mathbf{P}$  la différence de la somme des quadri-vecteur énergie-impulsion des particules initiales et finales  $\Delta\mathbf{P}^{\text{tot}} = \sum_f \text{finales} \mathbf{P}^f - \sum_i \text{initiale} \mathbf{P}^i$ . La composante temporelle de ce quadri-vecteur est  $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\text{finale}} - \mathcal{E}^{\text{initiale}}$  la différence entre l'énergie finale et initiale. Montrer que la conservation de l'énergie  $\Delta\mathcal{E} = 0$ , implique la conservation de la quantité de mouvement  $\Delta\vec{p}$ .

Rappel : Si  $(x^\mu)$  et  $(x'^\mu)$  sont les composantes d'un quadri-vecteur  $\mathbf{X}$  exprimées dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  tels que  $x'^\mu = \Lambda(\beta)^\mu{}_\nu x^\nu$  alors

$$x^0 = \gamma(x'^0 + \vec{\beta} \cdot \vec{x}'), \quad \vec{x} = \vec{x}' + \gamma\vec{\beta} \left( \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{\beta} \cdot \vec{x}' + x'^0 \right). \quad (10)$$

$\gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}$  est le facteur de Lorentz de cette transformation,  $\vec{v} = \vec{\beta}c$  étant la vitesse relative de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

### 6.3. Masse invariante et référentiel du centre de masse

Considérons un système de particules libres de masses  $m_i$ .

- a) Démontrer l'inégalité triangulaire (9). En déduire que le quadri-vecteur énergie-impulsion total satisfait

$$\sqrt{\mathbf{P}_{\text{tot}}^2} \geq \sum_i m_i c. \quad (11)$$

On définit généralement l'invariant relativiste suivant :

$$s = \|\mathbf{P}_{\text{tot}}\|^2. \quad (12)$$

- b) Que vaut  $s$  pour une collection de particules au repos les unes par rapport aux autres ?

On considère deux particules de masses  $m_1$  et  $m_2$ . On suppose que la particule 2 vient percuter la particule 1 au repos, et que les deux particules forment un état lié de masse  $m_t$ .

- c) Exprimer l'énergie (totale) de la particule 2, dans le référentiel du laboratoire, en fonction de  $m_t$  et des masses  $m_1$  et  $m_2$  des particules.
- d) Donner l'énergie totale du système initial. Donner l'expression du facteur  $\gamma^{\text{CM}}$  en fonction des masses. Considérer la limite non relativiste et interpréter le résultat.

Dans le cas où  $\mathbf{P}_{\text{tot}}$  est du genre temps c'est-à-dire  $\|\mathbf{P}_{\text{tot}}\|^2 > 0$ , on définit le référentiel du centre de masse en imposant  $\vec{p}_{\text{tot}}^{\text{CM}} = 0$ .

- e) Déterminer la vitesse  $\vec{v}^{\text{CM}} = \vec{\beta}^{\text{CM}} c$ , du référentiel du centre de masse dans le référentiel du laboratoire comme fonction des composantes du quadri-vecteur  $\mathbf{P}_{\text{tot}}$ .
- f) Retrouver l'expression du facteur  $\gamma^{\text{CM}}$  pour le système à deux particules de la question précédente.

### 6.4. Effet Compton

On considère la diffusion de rayon  $X$  sur du graphite. On considère un électron  $e^-$  au repos percuté par un photon  $\gamma$ . Après le choc le photon et l'électron diffusent. Nous avons la réaction suivante



- a) Écrire la relation de conservation des quadri-vecteurs énergie-impulsion

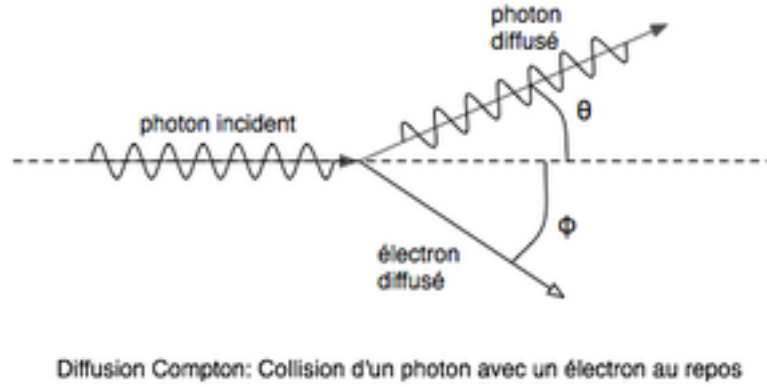


FIGURE 1. – Effet Compton de diffusion d'un photon sur un électron

- b) On dénote par  $\mathbf{P}_\gamma^i$  et  $\mathbf{P}_\gamma^f$  et  $\mathbf{P}_{e^-}^i$  et  $\mathbf{P}_{e^-}^f$  les quadri-vecteurs énergie-impulsion initial et final du photon, respectivement de l'électron  $e^-$ . Calculer

$$(\mathbf{P}_\gamma^i - \mathbf{P}_\gamma^f)^2 \quad (14)$$

en fonction de l'angle de diffusion du photon

- c) Calculer

$$(\mathbf{P}_{e^-}^i - \mathbf{P}_{e^-}^f)^2 \quad (15)$$

en fonction des énergies des photons. Pour cela on utilisera la relation de conservation de l'énergie.

- d) En déduire la relation entre l'angle de diffusion et la différence des longueur d'ondes des photons initial et final. On rappelle que  $\mathcal{E} = hc/\lambda$ .

Pour une source de Césium 137 émettant des photons d'énergie  $\mathcal{E}_\gamma^i = 662 \text{ KeV}$ , l'énergie des photons finaux est maximale, lorsque  $\lambda^f$  est minimale. Ce qui est réalisé pour  $\theta = \pi$ . On trouve alors  $\mathcal{E}_\gamma^f = 184.35 \text{ KeV}$ .

#### 6.4.1. Contexte historique

On remarque l'apparition de longueur caractéristique

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e c} = 2.4 \cdot 10^{-12} \text{ m}, \quad (16)$$

qui représente la longueur d'onde de Compton de l'électron. Pour observer la diffusion des photons sur des électrons il faut donc envoyer des rayons X. C'est ce que Arthur Holly Compton a réalisé en 1923 à l'université de Washington à Saint Louis (USA). Cette expérience a été récompensée par le prix Nobel de physique en 1927.

Cet effet est important car il démontre que les propriétés lumière ne peuvent pas être seulement comprise en considérant la lumière comme une onde électromagnétique. La théorie classique de diffusion des ondes électromagnétique donnée par la diffusion de Thompson, ne peut pas expliquer le décalages des longueurs d'onde à faible intensité. La lumière doit donc se comporter comme une particule pour expliquer l'observation de l'effet Compton aux faibles intensités.

C'est cette observation qui a convaincu Compton que la lumière est composée de corpuscules (les quantas) dont l'énergie est proportionnelle à la fréquence, comme prédit par Albert Einstein.

6. *PC 5 : Mécanique relativiste*



## 6. PC6 : Relativité et électromagnétisme

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 16 décembre 2014

### 6.1. Loi de transformations

On considère le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$  et un référentiel  $\mathcal{R}'$  en mouvement uniforme de vitesse  $\vec{v} = c\vec{\beta}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

Grâce aux lois de transformation des tenseurs on peut montrer les lois de transformation des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma \left( \vec{E}_{\perp} + c\vec{\beta} \times \vec{B}_{\perp} \right), \quad (1)$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma \left( \vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c}\vec{\beta} \times \vec{E}_{\perp} \right). \quad (2)$$

où  $\vec{w}_{\parallel}$  est la projection du vecteur  $\vec{w}$  selon la direction du mouvement relatif des deux référentiels, et  $\vec{w}_{\perp}$  la composante orthogonale au mouvement.

- a) Rappeler d'où viennent les lois de transformations des champs électriques et magnétiques.
- b) Rappeler pourquoi les deux combinaisons  $\vec{E}^2/c^2 - \vec{B}^2$  et  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  sont invariantes par transformation de Lorentz.
- c) Quelles sont les conditions pour qu'il existe un référentiel où s'annule le champ électrique?
- d) Donner l'approximation Galiléenne (au premier ordre en  $v/c$ ) des transformations des champs.
- e) Finalement on considère que dans un référentiel  $\mathcal{R}$  le champ électrique est selon l'axe  $(\mathcal{O}y)$ ,  $\vec{E} = E\vec{e}_y$  et le champ magnétique  $\vec{B} = \vec{0}$  nul. Donnez l'expression des champs dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  en mouvement uniforme à vitesse  $c\beta$  selon l'axe  $(\mathcal{O}z)$ . Considérer la limite ultra-relativiste,  $|\beta| \simeq 1$ , et interpréter le résultat.

## 6.2. Mouvement quand les champs sont parallèles

On se place maintenant dans le référentiel où  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont parallèles le long de l'axe ( $\mathcal{O}z$ ).

- À partir de l'expression de  $F^{\mu\nu}$  donner les équations du mouvement pour les composantes de la quadrivitesse  $\mathbf{U}$  en fonction du temps propre  $\tau$  de la particule.
- Résoudre les équations en  $\mathbf{U}$  en supposant que l'on a les conditions initiales pour  $\tau = 0$  telle que  $U^x = \gamma v, U^y = U^z = 0$  avec  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ .
- À partir de la définition de la quadrivitesse donner alors l'expression de la trajectoire en fonction du temps  $t$  du laboratoire.
- Que se passe-t-il quand  $\vec{E} = 0$ ? Quelle est l'expression de la pulsation (pulsation cyclotron) du mouvement?
- Pour  $\vec{B} = 0$  donner l'équation de la trajectoire selon l'axe ( $\mathcal{O}z$ ) en fonction du temps  $t$ . Montrer que la limite non-relativiste donne l'expression classique pour la mouvement d'une particule chargée soumise à un champ électrique uniforme

$$z \simeq \frac{qE}{2m} t^2. \quad (3)$$

### 6.2.1. Contexte historique et expérimental

L'approximation Galiléenne de la transformation du champs  $\vec{B}$  est suffisante pour correctement décrire l'influence d'un champs magnétique ambiant sur le spin de l'électron.

S'il n'y a pas de différence qualitative entre le mouvement relativiste et le mouvement classique, le facteur  $\gamma$  induit néanmoins des complications techniques dans les applications. Dans de nombreux types d'accélérateurs, un champ magnétique est utilisé pour confiner les particules au voisinage d'une trajectoire circulaire. Le facteur  $\gamma$  fait que le rayon de ces trajectoires est, pour des particules ultra-relativistes, beaucoup plus grand que ce que prédit la mécanique classique. L'encombrement de ce type de dispositif est en partie dû à cet effet. De plus, la fréquence des champs accélérateurs, qui doit être adaptée à la fréquence cyclotron, doit être ajustée pendant toute la phase d'accélération pour tenir compte de la variation de ce facteur relativiste. Notons que cette « contraction » relativiste de la fréquence cyclotron peut être mise en évidence même pour des électrons de très basse énergie. Dans une très spectaculaire série d'expériences, Hans Dehmelt et ses collaborateurs (Université de Seattle) ont étudié des électrons confinés dans un piège constitué d'un champ magnétique et d'un champ quadripolaire électrique (piège de Penning). Ils ont ainsi mesuré avec une précision remarquable, sur un électron unique, le célèbre facteur gyro-magnétique anormal, qui constitue un test sévère de l'électrodynamique quantique. Une des étapes de l'expérience est d'exciter, par un champ radiofréquence convenable, le mouvement cyclotron

## 6.2. Mouvement quand les champs sont parallèles

de l'électron. Dehmelt a pu observer que la fréquence de résonance cyclotron se déplace avec l'énergie de l'électron, conformément à la loi relativiste. Les énergies mises en jeu n'étant que d'une fraction d'électron-volt, on pourra juger de la sensibilité de l'expérience.

6. *PC6 : Relativité et électromagnétisme*

## 7. PC 7 : Mécanique Hamiltonienne

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 6 janvier 2015

### 7.1. Rappel de cours

Nous adoptons les notations introduites en PC3, à savoir  $\vec{q}$  désigne les coordonnées généralisées,  $\frac{d\vec{q}}{ds} := \dot{\vec{q}}$  les vitesses généralisées et  $s$  est un paramètre le long de la trajectoire pouvant représenter le temps mais pas seulement.

Pour un système à  $n$  degrés de liberté décrit par la fonction de Lagrange  $\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; s)$ , on définit l'hamiltonien par transformation de Legendre, fonction des coordonnées généralisées, des moments généralisés de Lagrange et du paramètre  $s$  :

$$\mathcal{H}(\vec{q}, \vec{p}, s) := \dot{\vec{q}} \cdot \vec{p} - \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, s), \quad (1)$$

avec

$$\vec{p} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}}. \quad (2)$$

En composante cette équation s'écrit

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}. \quad (3)$$

On remarquera la position de l'indice pour la moment  $\vec{p} := (p_i)$  alors que  $\vec{q} = (q^i)$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

Il résulte de la définition générale de l'hamiltonien que

$$\frac{d\mathcal{H}}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \quad (4)$$

et que les équations du mouvement sont à présent données par  $2n$  équations du premier ordre, à savoir *les équations d'Hamilton* :

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} \quad \text{et} \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}}. \quad (5)$$

Une coordonnée  $q^\alpha$  est dite *cyclique* lorsque

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\alpha} = 0. \quad (6)$$

## 7. PC 7 : Mécanique Hamiltonienne

Ceci traduit l'invariance de  $\mathcal{H}$  vis-à-vis de la transformation  $q^\alpha \rightarrow q^\alpha + \varepsilon^\alpha$ . Il s'en suit que  $p_\alpha$  est une constante du mouvement.

Réciproquement si  $\partial\mathcal{H}/\partial p^\alpha = 0$  alors  $q^\alpha$  est une constante du mouvement. L'indépendance de  $\mathcal{H}$  vis-à-vis de  $p_\alpha$  est à interpréter comme une contrainte puisque  $q^\alpha$  est une constante du mouvement. Ceci suggère une similitude entre contraintes et symétries.

Le formalisme hamiltonien est le cadre conceptuel naturel de la mécanique classique. C'est aussi le formalisme qui se généralise aisément en celui de la mécanique quantique. On y définit *l'espace des phases*, c'est-à-dire une *variété symplectique* coordonnée par les variables d'état  $(\vec{q}, \vec{p})$  et dotée d'une structure de *crochets de Poisson* :

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right), \quad (7)$$

définit pour toute paire de fonctions dynamiques  $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$  et  $g(\vec{q}, \vec{p}, t)$ . En particulier

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad \text{et} \quad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i. \quad (8)$$

Le crochet de Poisson satisfait la règle de Leibniz :

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h, \quad (9)$$

et l'identité de Jacobi :

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \quad (10)$$

L'évolution temporelle de toute fonction dynamique est donnée par

$$\dot{f} := \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\}. \quad (11)$$

Pour toute variable dynamique  $f(\vec{q}, \vec{p})$  ne dépendant pas explicitement du temps, on conclut donc que

$$\dot{f} = 0 \iff \{f, \mathcal{H}\} = 0. \quad (12)$$

Ceci est un cas particulier du théorème de Noëther : à toute invariance correspond une loi de conservation.

Grâce à l'identité de Jacobi, on démontre le corollaire suivant : si  $f$  et  $g$  ne dépendent pas explicitement du temps et sont conservées, il en va de même pour  $\{f, g\}$ .

On définit enfin les transformations canoniques comme des transformations des variables d'état (coordonnées et moments) qui conservent la structure de crochet de Poisson et donc les équations d'Hamilton.

Les transformations canoniques sont les transformations des variables d'état qui laissent invariantes les équations du mouvement. On montre que  $(q^i, p_i) \rightarrow$

$(Q^j(q^i, p_i), P_j(q^i, p_i))$  est une transformation canonique si et seulement si

$$\{Q^i, Q^j\} = \{P_i, P_j\} = 0 \quad \text{et} \quad \{Q^i, P_j\} = \delta_j^i. \quad (13)$$

Il en résulte que les crochets de Poisson peuvent s'écrire indifféremment avec tout système de variables obtenu par transformation canonique.

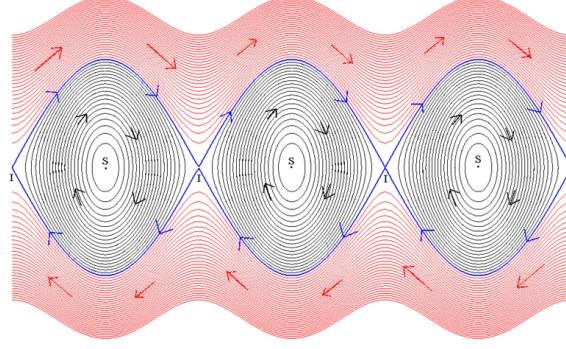


FIGURE 1. – Espace des phase du pendule simple

### 7.1.1. Exemples

1. Lorsque  $\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; s) = T - V$  où  $T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; s)$  est une fonction quadratique des vitesses et  $V(\vec{q}; s)$  une fonction indépendante des vitesses alors  $\mathcal{H} = T + V$ . C'est ce que nous avons vu en PC3 lorsque nous avons étudié la fonctionnelle de Beltrami.
2. La figure 1 représente l'espace des phases  $(\theta(t), p_\theta = \dot{\theta}(t))$  des orbites d'un pendule simple de longueur unité oscillant par rapport à la verticale. La conservation de l'énergie donne

$$\dot{\theta}^2 + 2(1 - \cos \theta) = \mathcal{H} \quad (14)$$

Si l'énergie du système est faible le mouvement est oscillatoire autour de la verticale (orbites périodes en noir), si l'énergie est importante le pendule tourne autour de l'origine (orbites en rouge). L'orbite en bleu est la séparatrice entre les deux régimes et les points, au centre et aux croisement des lignes bleues, sont des points d'équilibre  $\theta = n\pi$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Seuls  $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$  sont stable. La solution de l'équation différentielle s'exprime au moyen d'une fonction elliptique de Jacobi.

Si l'on se place au voisinage du point d'équilibre instable  $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$ , il est difficile de prédire l'évolution du système après une petite perturbation. Si elle décroît l'énergie du système nous devrions avoir une oscillation périodique, si elle augmente l'énergie l'évolution sera une rotation autour de l'origine.

## 7. PC 7 : Mécanique Hamiltonienne

L'analyse de la réponse des systèmes aux petites perturbations commença avec les travaux de Poincaré puis Liapunov et Birkhoff. Il apparut que même pour un système déterministe avec un faible nombre de degrés de liberté l'évolution du système est difficile à prédire. On parle de comportement chaotique. Sous l'impulsion de Kolmogorov l'école russe accomplit des travaux formidables dont ceux de Bogoliubov, Krylov, et Arnol'd. En 1971 l'article de D. Ruelle et F. Takens suggéra pour la première fois que le chaos peut se développer après une succession de trois bifurcations contrairement à la théorie proposée par Lev D. Landau qui supposait une infinité de bifurcations.

On pourra consulter le livre de David Ruelle *Hasard et Chaos* Odile Jacob (1991) pour se familiariser avec le caractère particulier du chaos.

Dans le livre C. Teitelboim, M. Henneaux, *Quantization of gauge systems*, Princeton University Press, 1992, on trouve un exposé systématique des systèmes hamiltoniens contraints avec des invariances globales et locales diverses.

### 7.2. L'oscillateur harmonique

On considère un oscillateur harmonique à une dimension de potentiel

$$U(q) = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad (15)$$

- a) Dédurre les équation du mouvement en utilisant le formalisme Lagrangien
- b) Dédurre les équation du mouvement en utilisant le formalisme Hamiltonien
- c) Montrer à l'aide des équations de Hamilton que le Lagrangien suivant décrit le mouvement d'un oscillateur amorti :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} e^{\alpha t} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) . \quad (16)$$

### 7.3. Mouvement dans un repère tournant

En PC3 nous avons vu que le lagrangien, pour une objet ponctuel de masse  $m$  de vitesse  $\vec{v}$  dans un référentiel en rotation de vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$ , est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} v^2 + m \vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{m}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 . \quad (17)$$

- a) Montrer que les moments généralisés et l'hamiltonien correspondant sont donnés par

$$\vec{p} = m (\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (18)$$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - \vec{\Omega} \cdot \vec{\ell}, \quad (19)$$



où

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (20)$$

est le vecteur moment cinétique.

## 7.4. Le cerceau à vitesse angulaire constante

Une perle glisse sans frottement le long d'un cerceau de rayon  $R$  animé d'un mouvement de rotation autour de son axe à vitesse angulaire  $\omega$  constante. La position de la perle sur le cerceau est déterminée par un seul degré de liberté, l'angle  $\theta$  avec la verticale. La position du cerceau est elle décrite par l'angle  $\phi$

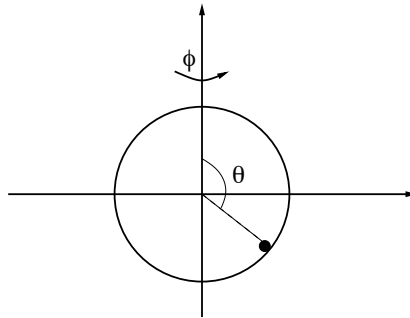


FIGURE 2. – Perle sur le cerceau en rotation

- Écrire le lagrangien de ce système et en déduire l'équation du mouvement.
- Écrire l'hamiltonien du système et en déduire à nouveau l'équation du mouvement.
- Montrer que la perle est soumise à un potentiel effectif  $V(\theta)$  dont on étudiera le comportement en fonction de  $\theta$ . On posera  $\omega_0^2 = g/R$ .
- Quel est le comportement de la perle pour des vitesses de rotation lente ( $\omega < \omega_0$ ) ?
- Même question dans le cas de la rotation rapide ( $\omega > \omega_0$ ).

## 7. *PC 7 : Mécanique Hamiltonienne*

## 8. PC8 : Relativité et gravitation

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 13 janvier 2015

### 8.1. Rappels de cours

Dans cette PC nous abordons des notions de relativité générale. La relativité générale traite du cas des espaces-temps courbes et un certain nombre des formules vues dans le cas de l'espace-temps plat de Minkowski doivent être adaptées pour refléter ce fait.

Le temps propre d'une particule  $ds^2 = (cd\tau)^2 = (dt)^2 - (d\vec{x})^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  va devenir l'élément de longueur géodésique

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\rho) dx^\mu dx^\nu . \quad (1)$$

Sous un changement de coordonnées locales  $x^\mu \rightarrow y^\mu(x)$  l'élément de longueur géodésique doit être invariant donc

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} dy^\rho dy^\sigma \quad (2)$$

implique que la loi de transformation de la métrique est donnée par

$$g_{\rho\sigma}(y) = g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} . \quad (3)$$

Dès 1911 Einstein a réalisé que le principe d'équivalence a deux conséquences physiques importantes sur la propagation des rayons lumineux dans un champ de gravitation. La première est que le décalage de la fréquence d'émission et de réception en des positions de l'espace-temps où le champs gravitationnel diffère.

C'est l'effet Doppler gravitationnel donné par

$$\nu_{\text{émission}} = \nu_{\text{réception}} \left( 1 + \frac{\Phi}{c^2} \right) \quad (4)$$

où  $\Phi$  est le potentiel gravitationnel. Dans un univers en expansion cet effet est responsable du rougissement de la lumière (le redshift). Le facteur de rougissement est utilisé pour indiquer la distance des objets astrophysiques.

La seconde conséquence est que la lumière sera déviée par un objet massif gravitant. Il a fait un premier calcul en 1911, publié dans l'article « Über den Einfluss

## 8. PC8 : Relativité et gravitation

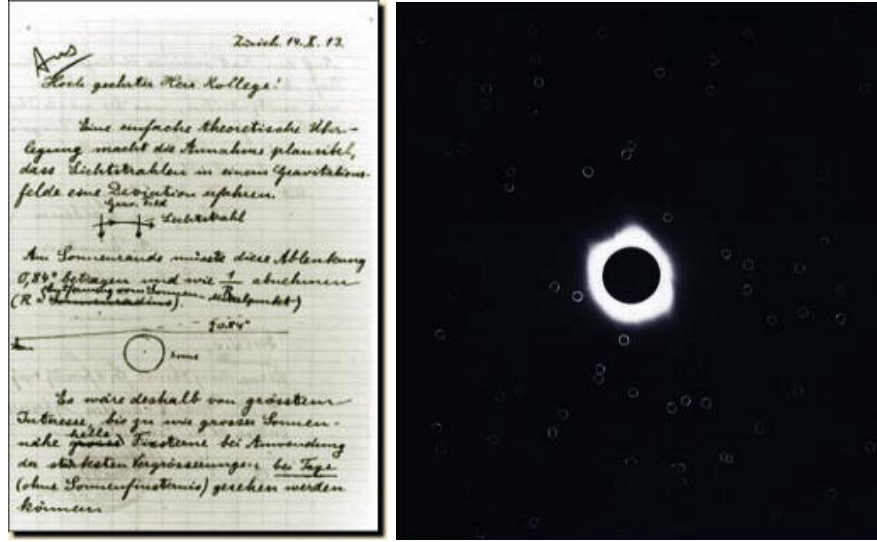


FIGURE 1. – Lettre d'Einstein à George Ellery Hale à l'observatoire du Mont Wilson en Californie, où il demande de mesurer la déviation des rayons lumineux. La déviation des rayons lumineux près du Soleil fut confirmée par Eddington qui releva la position des étoiles durant l'éclipse de 1919.

der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes » *Annalen der Physik* [35], 1911.<sup>1</sup> Ce calcul est celui présenté dans la question 9.3b. Il donne une réponse incorrecte d'un facteur 2 trop faible car il n'inclut pas les effets relativistes. Il a corrigé cette erreur dans son article de 1916 en travaillant avec la métrique courbe de Schwarzschild décrivant la géométrie de l'espace-temps au voisinage d'un objet massif stationnaire à symétrie sphérique. La courbure des rayons lumineux par des objets massifs a pour conséquence visible les phénomènes de lentilles gravitationnelles.

Une autre manifestation expérimentale est la génération d'onde gravitationnelles. On a des mesures indirectes, grâce à l'évolution des systèmes de pulsar binaire. On n'a pas encore de détection directe des ondes gravitationnelles.

### 8.2. Géodésiques en relativité générale

On considère le Lagrangien d'une particule en mouvement entre deux événements  $A$  et  $B$

$$\mathcal{S} = \int_{s_A}^{s_B} (d\tau)^2 \quad (5)$$

dans un espace-temps courbe de métrique  $g_{\mu\nu}(x^\sigma)$ . Le temps propre s'exprime alors

$$(cd\tau)^2 = g_{\mu\nu}(x^\rho) dx^\mu dx^\nu \quad (6)$$

1. Une traduction anglaise est accessible ici [http://www.relativitybook.com/resources/Einstein\\_gravity.html](http://www.relativitybook.com/resources/Einstein_gravity.html)

## 8.2. Géodésiques en relativité générale

ainsi nous obtenons un Lagrangien généralisant celui vu en PC4 (exercice 4.2)

$$\mathcal{S} = \int_{s_A}^{s_B} g_{\mu\nu}(x^\sigma) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu ds, \quad (7)$$

où  $\dot{x}^\mu$  est par définition  $dx^\mu/ds$  et où  $s$  est un paramètre le long de la courbe joignant  $A$  à  $B$ .

- a) Écrire les équations d'Euler-Lagrange dérivant de ce Lagrangien. Ces équations sont celles des géodésiques suivies par la particule.
- b) Montrer que ces équations peuvent se mettre sous la forme

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu \dot{x}^\lambda \dot{x}^\rho = 0 \quad (8)$$

où  $\Gamma_{\lambda\rho}^\mu$  est le symbole de Christoffel défini par

$$\Gamma_{\lambda\rho}^\mu := \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\lambda g_{\sigma\rho} + \partial_\rho g_{\sigma\lambda} - \partial_\sigma g_{\lambda\rho}), \quad (9)$$

$g^{\mu\nu}$  étant l'inverse de  $g_{\mu\nu}$  i.e. vérifiant  $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$ .

On considère le mouvement lent d'une particule ponctuelle dans un champ gravitationnel faible et stationnaire. Ainsi la métrique est proche de la métrique de Minkowski et s'écrit

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad h_{\mu\nu} \ll 1 \quad \text{et} \quad h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}. \quad (10)$$

On admettra que l'on peut paramétriser le mouvement de cette particule par son temps propre en prenant  $s = \tau$ .

- c) Montrer que les équations géodésiques se réduisent aux équations du mouvement d'une particule dans un champ gravitationnel que l'on reliera aux composantes pertinentes de  $h_{\mu\nu}$ .

On considère la métrique de Schwarzschild donnée par

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G_N M}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2G_N M}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (11)$$

où  $G_N$  est la constante de Newton. On suppose que l'on se place loin de  $r = 0$  et que l'on peut développer cette métrique au voisinage de la métrique de Minkowski écrite en coordonnée sphérique donnée par

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (12)$$

- d) Vérifier que le calcul précédent permet de retrouver le potentiel gravitationnel usuel autour d'un corps à symétrie sphérique.

La métrique de Schwarzschild fait intervenir un rayon caractéristique  $r_S = 2G_N M/c^2$ . Pour le soleil ce rayon est vaut  $r_s \simeq 2953 \text{ m}$  soit environ  $3 \text{ km}$ .

### 8.3. Déviation des rayons lumineux

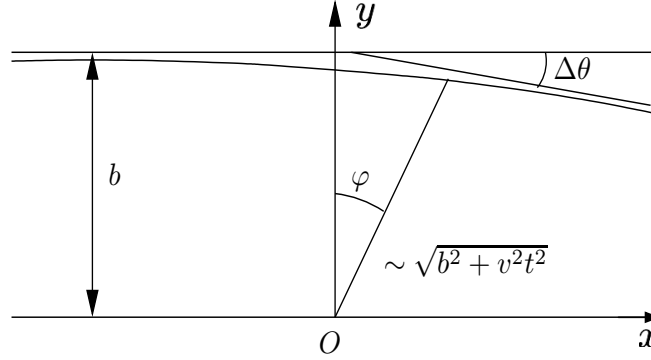


FIGURE 2. – Déviation de la lumière au voisinage du soleil.

On considère une petite masse  $m \neq 0$  arrivant de l'infini et rasant le soleil de masse  $M_\odot$ . La trajectoire de la particule s'incurve d'un angle  $\Delta\theta$  faible (voir la figure). On supposera que  $y \sim b$  est constant.

a) Montrer que l'angle de déviation  $\Delta\theta$  est donné par

$$\Delta\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x v_y dt. \quad (13)$$

où  $v_y$  est la projection de la vitesse sur l'axe verticale  $Oy$  de la figure.

- b) En utilisant le bilan des forces en mécanique classique calculer la variation  $dv_y/dt$  de la composante verticale du moment cinétique. En utilisant que  $dx = v dt$  est constant, puisque l'on suppose la déviation faible, en déduire l'expression pour  $\Delta\theta$ .
- c) En déduire le résultat pour la déviation des rayons lumineux par le soleil dans le cadre de la mécanique Newtonienne. Pour cela on utilisera les valeurs suivantes pour la masse du soleil  $M_\odot = 1.9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  et son rayon  $R_\odot = 695500 \text{ km}$  et on rappelle la valeur de la vitesse de la lumière  $c = 299792458 \text{ m/s}$  et la constante de gravitation  $G_N = 6.67300 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$ .

Nous allons maintenant recalculer cette déviation dans le cadre de la relativité générale.

#### 8.4. Compléments : les équations d'Einstein

c) Montrez que l'équation du mouvement géodésique dans (8) implique

$$\frac{1}{c} \frac{dv^y}{dx} = -\Gamma_{00}^y \left( \frac{c}{v} + \frac{v}{c} \right) - 2\Gamma_{x0}^y. \quad (14)$$

Pour cela on rappelle que  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ , donc  $u^0 = \gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $u^x = \gamma v^x/c$  et  $u^y = \gamma v^y/c$ . On utilisera les approximations suivantes  $u^y \simeq 0$ ,  $u^t \simeq \text{constante}$ ,  $u^x \simeq \text{constante}$ . Et que  $\Gamma_{00}^y \simeq \Gamma_{xx}^y$  pour la métrique de Schwarzschild donnée dans l'équation (11).

d) En supposant que pour le soleil  $\Gamma_{00}^y = \Gamma_{xx}^y \simeq +G_N M b / (r^3 c^2)$  et  $\Gamma_{x0}^y \simeq 0$  calculer l'angle de déviation de la lumière par le soleil.

e) Interprétez la différence entre les deux résultats.

#### 8.4. Compléments : les équations d'Einstein

À partir des symboles de Christoffel, on peut définir le tenseur de Riemann  $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$  par la formule

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\mu - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu. \quad (15)$$

Puis on définit le tenseur de Ricci  $R_{\nu\sigma} := R^\mu{}_{\nu\mu\sigma}$  et le scalaire de Ricci  $\mathcal{R} := R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$ . La relativité générale d'Einstein découle du Lagrangien d'Einstein-Hilbert

$$\mathcal{S} = \frac{c^4}{16\pi G_N} \int_{\mathcal{M}_4} \sqrt{-\det g} \mathcal{R} d^4x + \int_{\mathcal{M}_4} \sqrt{-\det g} \mathcal{L}_m d^4x, \quad (16)$$

où  $\det g = \det(g_{\mu\nu})$ ,  $G_N$  est la constante de gravitation de Newton. La variation du lagrangien de matière  $\mathcal{L}_m$  donne le tenseur-énergie impulsion décrivant le couplage de la matière ou densité d'énergie à la gravitation

$$T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-\det g}} \frac{\partial(\sqrt{-\det g} \mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (17)$$

Un calcul un peu long de la variation de cette action par rapport à la métrique  $g_{\mu\nu}$  donne les équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = \frac{8\pi G_N}{c^2} T_{\mu\nu}. \quad (18)$$

Nous recommandons les livres S. Weinberg "Gravitation and Cosmology" John Wiley, New-York (1972) et Landau and Lifchitz "Théorie classique des champs" MIR.

8. *PC8 : Relativité et gravitation*



Deuxième partie .

Enoncés des devoirs à la maison



## 9. DM1 : Devoir à la maison

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

Devoir à la maison

à rendre en PC4 (2/12/2014)

### 9.1. Équation d'onde

On considère l'espace à quatre dimensions de coordonnées  $(ct, x, y, z)$  munit de la métrique  $\eta^{\mu\nu} := (+1, -1, -1, -1)$ . Soit  $(ct', x', y', z')$  un autre système de coordonnées reliée au premier système par la transformation suivante

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (1)$$

On considère l'opérateur d'Alembertien défini par

$$\square := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2)$$

- a) Déterminer la loi de transformation du d'Alembertien sous la transformation (1).
- b) Considérer le cas de deux observateurs avec une vitesse relative  $v$  selon l'axe  $(\mathcal{O}x)$  faible devant la vitesse de la lumière. Montrer qu'au premier ordre en  $v/c$  la transformation de référentiel entre les observateurs correspond à  $(a, b) = (1, v/c)$ . Calculer la transformation du d'Alembertien sous cette transformation. Que concluez-vous ? On examinera le cas particulier où  $c \rightarrow \infty$ .
- c) On considère maintenant que nos deux observateurs sont relativistes, toujours en mouvement relatif à vitesse  $v$  le long de l'axe  $(\mathcal{O}x)$ . Donner la loi de transformation du d'Alembertien. Que concluez-vous ?
- d) On considère l'équation de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(t, x, y, z) + U(x, y, z) \Psi(t, x, y, z) = i\hbar \frac{\partial \Psi(t, x, y, z)}{\partial t} \quad (3)$$

avec la laplacien  $\Delta = (\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2 + (\partial/\partial z)^2$ . Étudier l'invariance cette équation sous une transformation galiléenne. Montrer qu'il existe une fonction

## 9. DM1 : Devoir à la maison

$f(t', x')$  telle que  $\Psi(t, x) = f(t', x') \tilde{\Psi}(t', x')$  avec  $\tilde{\Psi}(t', x')$  une fonction d'onde satisfaisant l'équation de Schrödinger en les variables  $(t', x')$ .

- e) Que ce passe-t-il pour l'équation d'onde  $\square\phi(t, x, y, z) = 0$  dans le cas galiléen et relativiste. Peut-on trouver une fonction  $f(t', x')$  telle que  $\phi(t, x) = f(t', x') \tilde{\phi}(t', x')$  et que l'équation d'onde soit invariante sous les transformations galiléennes. Qu'en déduire sur la nature de l'équation d'onde ?

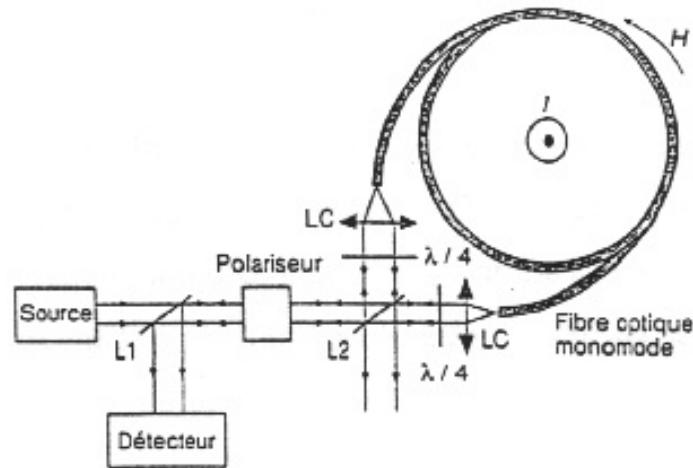
## 9.2. Paradoxe d'Ehrenfest

En 1909 Paul Ehrenfest a énoncé un paradoxe semblant montrer une incohérence logique à la relativité restreinte.

On considère un disque de rayon  $\rho$  en rotation avec une vitesse angulaire constante  $\omega$ . On dénote par  $\mathcal{R}$  le repère inertiel du laboratoire et  $\mathcal{R}'$  le repère en rotation attaché au disque.

- a) Quelle est la valeur du rayon du disque dans les repères  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ?  
b) Quelle est la circonférence  $L$  dans le repère du laboratoire  $\mathcal{R}$  et  $L'$  dans le repère du disque en rotation ?  
c) Comparer les rapports  $L/R$  et  $L'/R'$  ? Qu'en concluez-vous ?

## 9.3. Effet Sagnac



L'effet Sagnac est un autre effet paradoxal de la relativité restreinte découvert par Georges Sagnac en 1913. Cet effet permet de détecter en optique un mouvement de rotation par rapport à un référentiel inertiel. Des gyroscopes à laser exploitant l'effet Sagnac sont utilisés dans certains avions de ligne Airbus ou Boeing pour mesurer avec précision la rotation d'un dispositif relativement à un repère inertiel.

On considère à nouveau un disque de rayon  $\rho$  en rotation avec une vitesse angulaire constante  $\omega$ . On dénote par  $\mathcal{R}$  le repère inertiel du laboratoire et  $\mathcal{R}'$  le repère en rotation attaché au disque.

Sur le bord du disque est placé un émetteur/récepteur  $E$ . Ce dispositif émet un signal  $S_1$  qui se propage avec une vitesse  $\omega_1$  dans le sens de rotation du disque, et un signal  $S_2$  qui se propage avec une vitesse  $\omega_2$  dans le sens opposé à la rotation du disque. Les deux signaux évoluent le long du bord extérieur du disque.

- a) Déterminez les positions angulaires  $\theta_1$  et  $\theta_2$  de réception des signaux  $S_1$  et  $S_2$  par le détecteur.
- b) Calculer les temps propre  $\tau_1$  et  $\tau_2$  de propagation de chacun des signaux entre l'émission et la réception. Calculer la différence des  $\delta\tau = \tau_1 - \tau_2$ .
- c) Si l'émetteur/récepteur émet de la lumière de manière isotrope  $\omega' = \omega_1 = -\omega_2$ , donner l'expression de différence de temps  $\delta\tau$ .
- d) Considérer la limite non relativiste. Qu'en concluez vous ?

9. *DM1 : Devoir à la maison*

## 10. DM2 : Second devoir à la maison

10. *DM2 : Second devoir à la maison*



# DM2 : Second devoir à la maison

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

Devoir à la maison

à rendre en PC7 (6/1/2015)

## 1.1. Équation de Maxwell et sources

Le rang de covariance d'un tenseur est augmenté d'une unité par l'action de l'opérateur  $\partial$  de « composantes »  $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\} \equiv (\frac{\partial_t}{c}, \vec{\nabla})$ . Le tenseur métrique ( $\eta_{\mu\nu}$  ou son inverse  $\eta^{\mu\nu}$ ) et le tenseur antisymétrique de Levi-Civita ( $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  ou  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  avec  $\varepsilon^{0123} = 1 = -\varepsilon_{0123}$ ) peuvent aussi être utilisés pour engendrer de nouveaux tenseurs ou scalaires (invariants) à partir de tenseurs préalablement définis.

Si l'on considère le tenseur de Faraday  $\mathbf{F}$  décrit le champ électromagnétique. Ses composantes  $F_{\mu\nu}$  forment la matrice suivante :

$$F_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & E^x/c & E^y/c & E^z/c \\ -E^x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E^y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E^z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

alors

$$F^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma}. \quad (2)$$

a) Montrer l'équivalence

$$F^\mu = 0 \iff \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (3)$$

On a vu en PC4 que cette équation implique les équations de Maxwell suivantes

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{absence de monopôles magnétiques} \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{loi de Faraday} \quad (5)$$

b) Vérifiez les expressions des invariants relativistes du champs électromagnétique

$$\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -2 \left( \frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2 \right), \quad (6)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -\frac{8}{c} \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (7)$$

10. DM2 : Second devoir à la maison

c) Montrez que l'équation

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad (8)$$

implique les équations de Maxwell avec sources

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \quad \text{loi de Gauss} \quad (9)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{loi d'Ampère} \quad (10)$$

où  $\varrho$  et  $\vec{j}$  sont les densités de charge et de courant (rappel :  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ ).

d) Montrer que  $\mathbf{J} = \{j^\nu, \nu = 0, 1, 2, 3\} := (c\varrho, \vec{j} = \varrho \vec{v})$  sont les composantes d'un quadri-vecteur  $\mathbf{J}$ , dit de densité de courant, si la charge électrique est invariante sous les transformation de Lorentz.

e) Montrer que les équations inhomogènes de Maxwell imposent l'équation de continuité

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (11)$$

f) Écrire cette équation en utilisant le quadri-vecteur  $\mathbf{J}$ . Obtenir cette équation directement à partir de (8).

Nous avons vu en PC4 que les équations homogènes de Maxwell (4)-(5) sont satisfaites si  $F_{\mu\nu}$  résulte d'un potentiel  $\mathbf{A} = (A^0/c, \vec{A})$  selon

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (12)$$

Nous avons vu que  $\mathbf{A}$  est défini à la dérivée d'une fonction arbitraire près

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' + \nabla \chi. \quad (13)$$

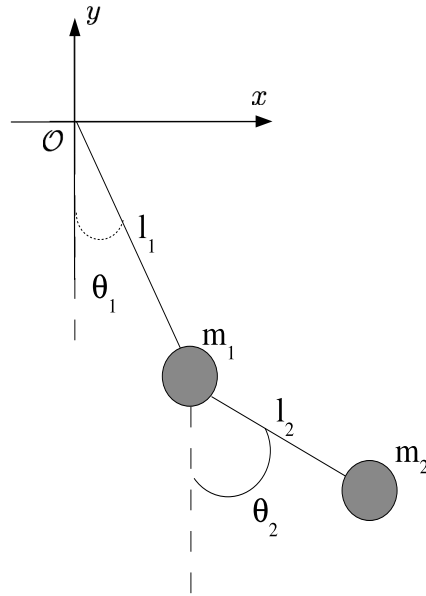
Nous avons vu aussi que pour fixer cette liberté de jauge, on impose une contrainte. Une contrainte invariante de Lorentz est la jauge de Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (14)$$

g) Montrer que dans cette jauge les équations de Maxwell inhomogènes deviennent

$$\square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (15)$$

où  $\square := \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$  est l'opérateur d'Alembertien.



## 1.2. Le pendule double

On veut analyser la dynamique d'un pendule double placé dans le champ de gravitation terrestre. Ce pendule est constitué de deux masses reliées par des cables rigides de masses négligeables (voir fig 1.2).

- Écrire le lagrangien du système. En déduire les équation d'Euler-Lagrange.
- Sous l'hypothèse d'un angle initial  $\theta_0$  suffisamment petit, écrire les équation du mouvement dans l'approximation des petits déplacements.
- Résoudre les équations du mouvement. On suppose les condition initiales suivantes  $\theta_1(0) = \theta_0$ ,  $\theta_2(0) = 0$  et  $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ .

## 1.3. L'atome d'hydrogénoïde

On considère un atome Hydrogénoïde, obtenu en arrachant à un atome tous ses électrons sauf un. Ces atomes se comportent comme un atome d'Hydrogène avec un noyau de charge électrique réduite  $Z > 1$ .

L'électron est donc soumis au potentiel

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (16)$$

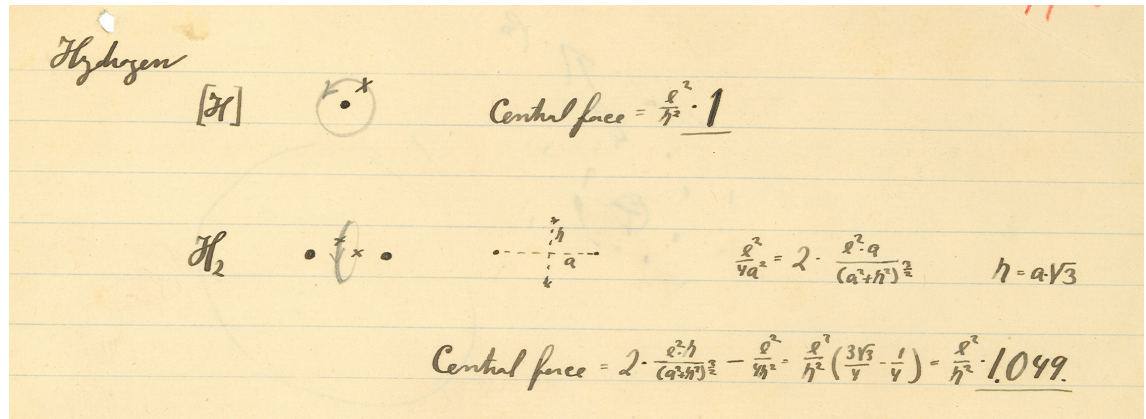


FIGURE 1. – manuscrit de l'article de Niels Bohr de juillet 1913 (avec la permission de l'« Archive Niels Bohr », Copenhague)

- Donner l'expression du Lagrangien du système en coordonnées sphériques
- Obtenir les équations d'Euler-Lagrange.
- Montrer l'existence de quantités conservées. Interpréter.

## 1.4. Pendule sphérique

On considère une masse  $m$  attachée à l'extrémité d'une tige rigide de masse négligeable, l'autre extrémité étant fixe par rapport au laboratoire. La longueur de la tige est  $R$ . On note  $\varphi$  la colatitude (le pôle de la sphère étant choisi à la verticale de son centre) et  $\theta$  la longitude (cf. figure 2).

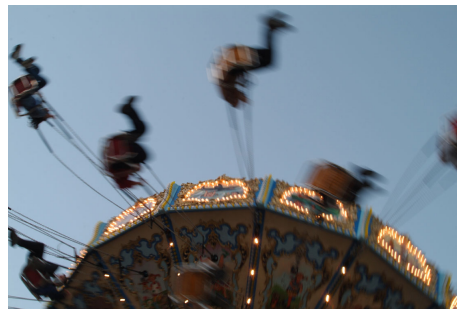
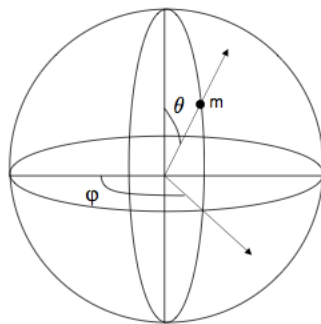


FIGURE 2. – Schéma d'un pendule sphérique et photographie d'un manège fonctionnant selon le principe du pendule sphérique.

- Écrire le Lagrangien pour le pendule sphérique.

#### 1.4. Pendule sphérique

- b) En déduire que  $\varphi$ , définie sur la figure 2, est une variable cyclique. Quelle est la quantité conservée associée ? Trouvez l'autre quantité conservée.
- c) Montrer que l'angle  $\theta$  satisfait une équation de la forme

$$\frac{d\theta}{dt} = f(\theta, E_1, E_2) \quad (17)$$

où  $f$  est une fonction de  $\theta$  que l'on déterminera et de deux constantes du mouvement  $E_1$  et  $E_2$  que l'on interprétera.

*10. DM2 : Second devoir à la maison*

## 2. Second devoir à la maison (2012)

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

Devoir à la maison

à rendre en PC 7 (19/12/2012)

Devoir donnée en 2012

### 2.1. Équation de Maxwell et sources

Le rang de covariance d'un tenseur est augmenté d'une unité par l'action de l'opérateur  $\partial$  de « composantes »  $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\} \equiv (\frac{\partial_t}{c}, \vec{\nabla})$ . Le tenseur métrique ( $\eta_{\mu\nu}$  ou son inverse  $\eta^{\mu\nu}$ ) et le tenseur antisymétrique de Levi-Civita ( $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  ou  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  avec  $\varepsilon^{0123} = 1 = -\varepsilon_{0123}$ ) peuvent aussi être utilisés pour engendrer de nouveaux tenseurs ou scalaires (invariants) à partir de tenseurs préalablement définis.

Si l'on considère le tenseur de Faraday  $\mathbf{F}$  décrit le champ électromagnétique. Ses composantes  $F_{\mu\nu}$  forment la matrice suivante :

$$F_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

alors

$$F^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma}. \quad (2)$$

a) Montrer l'équivalence

$$F^\mu = 0 \iff \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (3)$$

On a vu en PC5 que cette équation implique les équations de Maxwell suivantes

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{absence de monopôles magnétiques} \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{loi de Faraday} \quad (5)$$

## 2. Second devoir à la maison (2012)

b) Vérifiez les expressions des invariants relativistes du champs électromagnétique

$$\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = -2\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2\right), \quad (6)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = -\frac{8}{c}\vec{E} \cdot \vec{B} \quad (7)$$

c) Montrez que l'équation

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad (8)$$

implique les équations de Maxwell avec sources

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \quad \text{loi de Gauss} \quad (9)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{loi d'Ampère} \quad (10)$$

où  $\varrho$  et  $\vec{j}$  sont les densités de charge et de courant (rappel :  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ ).

d) Montrer que  $\mathbf{J} = \{j^\nu, \nu = 0, 1, 2, 3\} := (c\varrho, \vec{j} = \varrho \vec{v})$  sont les composantes d'un quadri-vecteur  $\mathbf{J}$ , dit de densité de courant, si la charge électrique est invariante sous les transformation de Lorentz.

e) Montrer que les équations inhomogènes de Maxwell imposent l'équation de continuité

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (11)$$

f) Écrire cette équation en utilisant le quadri-vecteur  $\mathbf{J}$ . Obtenir cette équation directement à partir de (24).

Nous avons vu en PC5 que les équations homogènes de Maxwell dans (3), ou de manière équivalente (10)-(11) sont satisfaites si  $F_{\mu\nu}$  résulte d'une forme de potentiel  $\mathbf{A} = (A^0/c, \vec{A})$  selon

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (12)$$

Nous avons vu que  $\mathbf{A}$  est défini à la dérivée d'une fonction arbitraire près

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' + \nabla \chi \quad (13)$$

Nous avons vu aussi que pour fixer cette liberté de jauge, on impose une contrainte. Une contrainte invariante de Lorentz est la jauge de Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (14)$$



g) Montrer que dans cette jauge les équations de Maxwell inhomogènes deviennent

$$\square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (15)$$

où  $\square := \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$  est l'opérateur d'Alembertien.

## 2.2. Effet de seuil

On considère la réaction de désintégration d'un pion  $\pi^-$  sur un proton  $p^+$  considéré au repos dans le repère du laboratoire

$$\pi^- + p^+ \rightarrow K^0 + \Lambda^0 \quad (16)$$

Le méson pion  $\pi^-$ , composé par la paire de quark  $\bar{u}d$ , a une masse  $m_{\pi^-} c^2 = 140$  MeV. Le baryon proton, composé des trois quarks  $uud$ , a une masse  $m_{p^+} c^2 = 938$  MeV. Le méson kaon  $K^0$ , est une superposition des états liés des paires de quarks  $d\bar{s}$  et  $\bar{d}s$ . Il a une masse de  $m_{K^0} c^2 = 498$  MeV. Finalement, le baryon  $\Lambda^0$ , composé des trois quarks  $uds$ , a une masse de  $m_{\Lambda^0} = 1116$  MeV.

a) Calculez l'énergie de seuil du pion pour la réaction puisse avoir lieu

Dans une expérience où le pion a une énergie cinétique incidente de 2.5 GeV, le baryon  $\Lambda^0$  est observé avec une énergie cinétique de 0.6 GeV, et dans une direction à  $45^\circ$  par rapport au mouvement du pion. On rappelle que  $1 \text{ GeV} = 10^3 \text{ MeV}$ .

b) Calculez le facteur  $\gamma^{\text{CM}}$  dans le repère du centre de masse.

c) Calculez l'énergie cinétique du kaon  $K^0$  dans le repère du laboratoire et du centre de masse.

### 2.2.1. Contexte historique et expérimental

Depuis leur découverte en 1947 les Kaons ont été une source d'information importante sur la nature des interactions fondamentales. Ils ont joué un rôle important dans la compréhension du modèle des quarks. Les Kaons portent un nombre quantique d'étrangeté  $S$ , induit par Murray Gell-Mann (Nobel 1969) et Kazuhiko Nishijima. Ils introduisirent ce nombre quantique pour expliquer la facile production des Kaons et leur désintégration plus lente que ce qui est attendu compte tenu de leur masse. Ce nouveau nombre quantique d'étrangeté est postulé être conservé lors des collisions (comme pour celle donnée ci dessus), mais pas lors de la désintégration de la particule.

Un autre particularité du Kaon neutre  $K^0$  est d'avoir une antiparticule violant la symétrie de parité. Le Kaon court  $K_S^0 = (d\bar{s} + s\bar{d})/\sqrt{2}$  a un temps de vie de deux ordre de grandeur inférieur à celui du Kaon long  $K_L^0 = (d\bar{s} - s\bar{d})/\sqrt{2}$ . Ces particules sont leur propre antiparticule.

C'est en utilisant des Kaons qu'a été découverte de la violation de la symétrie CP, responsable pour l'asymétrie entre matière et antimatière dans l'univers. Cette expérience a reçu le prix Nobel en 1980.

### 2.3. Pendule sphérique

On considère une masse  $m$  attachée à l'extrémité d'une tige rigide de masse négligeable, l'autre extrémité étant fixe par rapport au laboratoire. La longueur de la tige est  $R$ . On note  $\varphi$  la colatitute (le pôle de la sphère étant choisi à la verticale de son centre) et  $\theta$  la longitude (cf. figure 1).

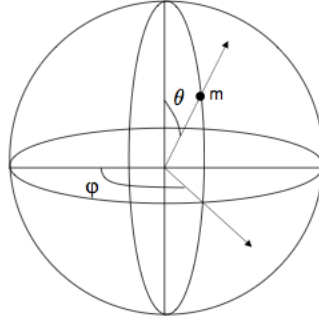


FIGURE 1. – Pendule sphérique

- Écrire le Lagrangien pour le pendule sphérique.
- En déduire que  $\varphi$  est une variable cyclique. Quelle est la quantité conservée associée ? Trouvez l'autre quantité conservée.
- Montrer que l'on a

$$\frac{d\theta}{dt} = f(\theta, E_1, E_2) \quad (17)$$

où  $f$  est une fonction de  $\theta$  que l'on déterminera et de deux constantes du mouvement  $E_1$  et  $E_2$  que l'on interprétera.

## 3. DM2 Second devoir à la maison

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

Devoir à la maison

à rendre en PC7 (20/12/2013)

donné en 2013

### 3.1. Équation de Maxwell et sources

Le rang de covariance d'un tenseur est augmenté d'une unité par l'action de l'opérateur  $\partial$  de « composantes »  $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\} \equiv (\frac{\partial_t}{c}, \vec{\nabla})$ . Le tenseur métrique ( $\eta_{\mu\nu}$  ou son inverse  $\eta^{\mu\nu}$ ) et le tenseur antisymétrique de Levi-Civita ( $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  ou  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  avec  $\varepsilon^{0123} = 1 = -\varepsilon_{0123}$ ) peuvent aussi être utilisés pour engendrer de nouveaux tenseurs ou scalaires (invariants) à partir de tenseurs préalablement définis.

Si l'on considère le tenseur de Faraday  $\mathbf{F}$  décrit le champ électromagnétique. Ses composantes  $F_{\mu\nu}$  forment la matrice suivante :

$$F_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & E^x/c & E^y/c & E^z/c \\ -E^x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E^y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E^z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

alors

$$F^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma}. \quad (2)$$

a) Montrer l'équivalence

$$F^\mu = 0 \iff \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (3)$$

On a vu en PC5 que cette équation implique les équations de Maxwell suivantes

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{absence de monopôles magnétiques} \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{loi de Faraday} \quad (5)$$

### 3. DM2 Second devoir à la maison

b) Vérifiez les expressions des invariants relativistes du champs électromagnétique

$$\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = -2\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2\right), \quad (6)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = -\frac{8}{c}\vec{E} \cdot \vec{B} \quad (7)$$

c) Montrez que l'équation

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad (8)$$

implique les équations de Maxwell avec sources

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \quad \text{loi de Gauss} \quad (9)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{loi d'Ampère} \quad (10)$$

où  $\varrho$  et  $\vec{j}$  sont les densités de charge et de courant (rappel :  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ ).

d) Montrer que  $\mathbf{J} = \{j^\nu, \nu = 0, 1, 2, 3\} := (c\varrho, \vec{j} = \varrho \vec{v})$  sont les composantes d'un quadri-vecteur  $\mathbf{J}$ , dit de densité de courant, si la charge électrique est invariante sous les transformation de Lorentz.

e) Montrer que les équations inhomogènes de Maxwell imposent l'équation de continuité

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (11)$$

f) Écrire cette équation en utilisant le quadri-vecteur  $\mathbf{J}$ . Obtenir cette équation directement à partir de (24).

Nous avons vu en PC5 que les équations homogènes de Maxwell (4)-(5) sont satisfaites si  $F_{\mu\nu}$  résulte d'un potentiel  $\mathbf{A} = (A^0/c, \vec{A})$  selon

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (12)$$

Nous avons vu que  $\mathbf{A}$  est défini à la dérivée d'une fonction arbitraire près

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' + \nabla \chi. \quad (13)$$

Nous avons vu aussi que pour fixer cette liberté de jauge, on impose une contrainte. Une contrainte invariante de Lorentz est la jauge de Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (14)$$

### 3.2. Géodésique sur la sphère

g) Montrer que dans cette jauge les équations de Maxwell inhomogènes deviennent

$$\square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (15)$$

où  $\square := \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$  est l'opérateur d'Alembertien.

### 3.2. Géodésique sur la sphère

On veut déterminer le chemin le plus court entre deux points sur une sphère de rayon  $R$ .

a) Si  $s$  est un paramètre le long de la courbe exprimer la longueur du chemin selon

$$l(\vec{r}) = \int_{s_A}^{s_B} f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; s) ds. \quad (16)$$

b) Afin de tenir compte de la contrainte que le mouvement s'effectue sur une sphère de rayon  $R$ , on modifie cette fonctionnelle en introduisant un multiplicateur de Lagrange  $\mu(s)$ , et l'on cherche à minimiser

$$l(\vec{r}) = \int_{s_A}^{s_B} (f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; s) - \mu(s) g(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; s)) ds. \quad (17)$$

Donner l'expression de  $h(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; s) = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; s) - \mu(s) g(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; s)$ .

c) En déduire que le chemin le plus court est un grand cercle passant par les points  $A$  et  $B$ .

### 3.3. L'atome d'hydrogéoïde

On considère un atome Hydrogéoïde, obtenu en arrachant à un atome tous ses électrons sauf un. Ces atomes se comportent comme un atome d'Hydrogène avec un noyau de charge électrique réduite  $Z > 1$ .

L'électron est donc soumis au potentiel

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (18)$$

a) Donner l'expression du Lagrangien du système en coordonnées sphériques

b) Obtenir les équations d'Euler-Lagrange.

c) Montrer l'existence de quantités conservées. Interpréter.

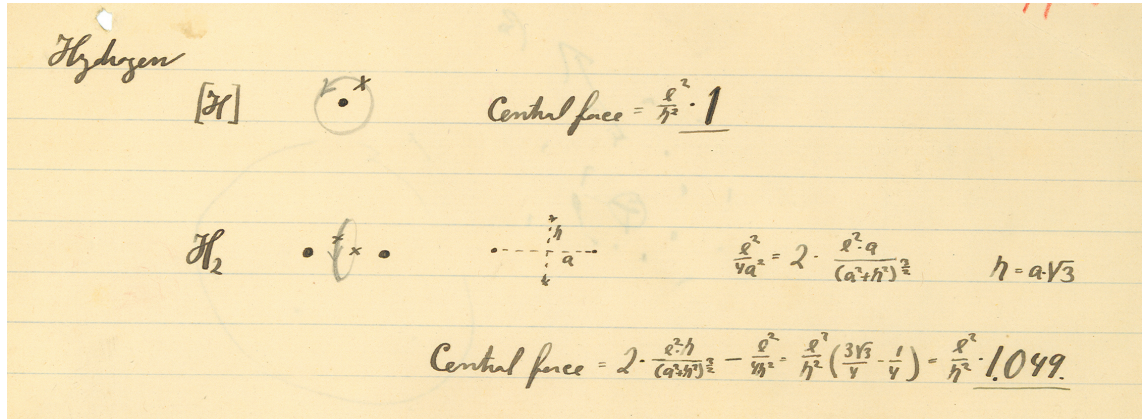


FIGURE 1. – manuscrit de l'article de Niels Bohr de juillet 1913 (avec la permission de l'« Archive Niels Bohr », Copenhague)

### 3.4. Pendule sphérique

On considère une masse  $m$  attachée à l'extrémité d'une tige rigide de masse négligeable, l'autre extrémité étant fixe par rapport au laboratoire. La longueur de la tige est  $R$ . On note  $\varphi$  la colatitute (le pôle de la sphère étant choisi à la verticale de son centre) et  $\theta$  la longitude (cf. figure 2).

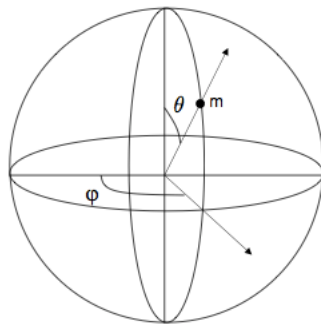


FIGURE 2. – Schéma d'un pendule sphérique et photographie d'un manège fonctionnant selon le principe du pendule sphérique.

- Écrire le Lagrangien pour le pendule sphérique.
- En déduire que  $\varphi$ , définie sur la figure 2, est une variable cyclique. Quelle est la quantité conservée associée ? Trouvez l'autre quantité conservée.

c) Montrer que l'angle  $\theta$  satisfait une équation de la forme

$$\frac{d\theta}{dt} = f(\theta, E_1, E_2) \quad (19)$$

où  $f$  est une fonction de  $\theta$  que l'on déterminera et de deux constantes du mouvement  $E_1$  et  $E_2$  que l'on interprétera.

### 3. *DM2 Second devoir à la maison*



Troisième partie .

Corrigés des petites classes



## 4. Corrigé PC 1 : Transformations de Lorentz

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 4 novembre 2014

### 4.2. Le problème d'Einstein

Oui bien sûr, il se verra. Son image dans le miroir sera la même quelque soit sa vitesse par rapport au sol.

Le coureur ne peut pas se déplacer à une vitesse supérieure ou égale à celle de la vitesse de la lumière. Donc même avec une vitesse très proche (mais inférieure) à celle de la lumière, la vitesse de la lumière est la même dans le repère inertiel du coureur.

C'est une conséquence des postulats de la relativité restreintes

- La vitesse de la lumière est constante dans le vide
- Dans deux référentiels inertiels en mouvement relatif non accéléré, les lois de la physique sont les mêmes.

### 4.3. Contraction des longueurs et dilatation du temps

À une altitude inférieure à 35 000 m, les muons ont une énergie originelle moyenne de 6 GeV.

- a) L'énergie du muon est  $E = 6\text{GeV} = \gamma mc^2$  avec  $\gamma = 1/(1 - \beta^2)^{1/2} = 60$  donc  $v = c\beta = 0.999861 c$ .
- b) En cinématique Galiléenne  $\Delta h^{Gal.} = v \tau_0 = 659.452 m$
- c) Dans le référentiel du détecteur la durée de vie est dilatée par les effets relativistes selon  $\tau = \gamma \tau_0 = 1.32 \cdot 10^{-4} s$ .
- d) Dans le référentiel du détecteur nous avons maintenant  $\Delta h^{Rel.} = v \tau = \gamma v \tau_0 = 39567.1 m$ . Ce qui est supérieur à l'altitude moyenne originale des muons de 6 GeV.
- e) Du point de vue du muon la distance à parcourir pour atteindre la Terre s'est contractée suite aux effets relativistes.

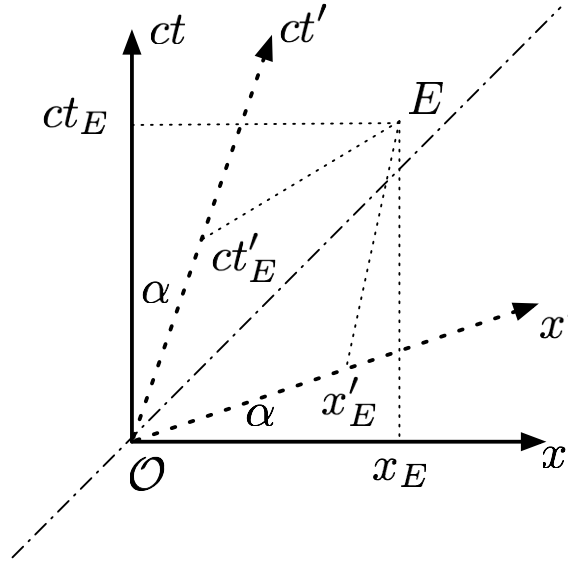


FIGURE 1. – Diagramme de Minkowski

#### 4.4. Simultanéité

On veut montrer qu'une transformation de Lorentz peut être visualisée par un diagramme d'espace-temps, ou diagramme de Minkowski, représenté en figure 1.

Soit un référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplaçant à une vitesse  $v$  par rapport un référentiel  $\mathcal{R}$ .

- a) Les coordonnées du référentiel  $\mathcal{R}'$  sont reliées à celle du référentiel  $\mathcal{R}$  selon

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad (1)$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x). \quad (2)$$

L'axe  $(\mathcal{O}ct')$  a pour équation  $x' = 0$  soit  $x = \beta ct$  et l'axe  $(\mathcal{O}x')$  a pour équation  $ct' = 0$  soit  $ct = \beta x$ . La pente de l'axe  $(\mathcal{O}x')$  est  $\tan \alpha = \beta$ , et la pente de l'axe  $(\mathcal{O}ct')$  est  $\tan \alpha' = 1/\beta$ . Donc  $\tan \alpha = 1/\tan \alpha'$ . Ce que l'on constate sur le diagramme puisque  $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ .

- b) Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  les rayons lumineux suivent la trajectoire  $x = ct$  représentée par une ligne à 45 degré sur le diagramme. Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , l'équation est  $x' = ct'$  ce qui donne la même droite, traduisant l'invariance de la trajectoire de la lumière sous transformations de Lorentz.
- c) Les lignes de simultanéité pour le référentiel  $\mathcal{R}$  sont déterminées par l'équation  $ct = \text{cste}$  et représentées par des lignes horizontales. Pour le référentiel  $\mathcal{R}'$  les lignes de simultanéité sont  $ct' = \text{cste}$  et représentées par des lignes inclinées d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Elles sont parallèles à l'axe  $(\mathcal{O}x')$ .

- d) Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  deux événements sont simultanés si  $\Delta t = 0$ . Dans  $\mathcal{R}'$  on a alors  $c\Delta t' = -\gamma\beta\Delta x$ . Si  $\Delta x > 0$  on peut avoir  $\Delta t' < 0$  !
- e) Si on dénote par  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_{ct}$  les vecteurs de base unitaires sur les axes  $(\mathcal{O}x)$  et  $(\mathcal{O}ct)$  respectivement. Et par  $\vec{e}_{x'}$  et  $\vec{e}_{ct'}$  les vecteurs de base de norme  $\epsilon^2 = \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_{x'} = \vec{e}_{ct'} \cdot \vec{e}_{ct'}$  sur les axes  $(\mathcal{O}x')$  et  $(\mathcal{O}ct')$  respectivement. On a que  $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_{x'} = \vec{e}_{ct} \cdot \vec{e}_{ct'} = \epsilon \cos \alpha$  et  $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_{ct'} = \vec{e}_{ct} \cdot \vec{e}_{x'} = \epsilon \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \epsilon \sin \alpha$ .

La relation entre les intervalles mesurés dans les deux référentiels est

$$\Delta x = \epsilon \cos \alpha \Delta x' + \epsilon \sin \alpha c\Delta t' \quad (3)$$

$$c\Delta t = \epsilon \sin \alpha \Delta x' + \epsilon \cos \alpha c\Delta t'. \quad (4)$$

On en déduit pour les intervalles relativistes

$$\Delta s^2 = \epsilon^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \Delta s'^2 \quad (5)$$

Comme  $\tan \alpha = \beta$  et  $\cos^{-2} \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$  on en déduit que

$$\Delta s^2 = \epsilon^2 \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} \Delta s'^2 \quad (6)$$

Le principe relativité impose que  $\Delta s^2 = \Delta s'^2$  ce qui implique le facteur d'échelle  $\epsilon$  vaut

$$\epsilon = \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}}. \quad (7)$$

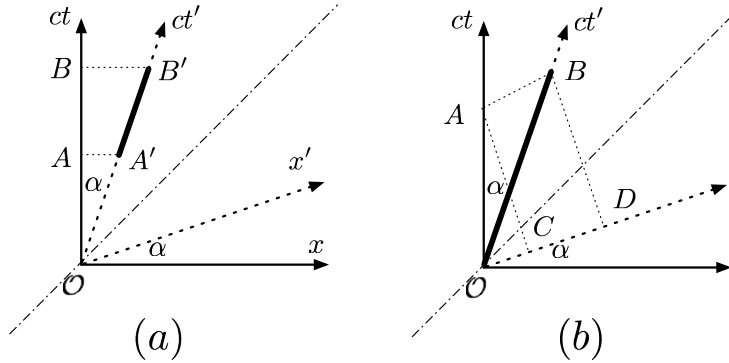


FIGURE 2. – (a) Dilatation de la durée  $c\Delta t_{A'B'}$  vue dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , (b) dilatation de la durée  $c\Delta t_{0A}$  vue dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

- f) Nous cherchons la relation entre la durée  $c\Delta t_{A'B'}$  mesurée dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , représentée par  $T_{A'B'}$ , et la durée  $c\Delta t_{AB}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , représentée par

#### 4. Corrigé PC 1 : Transformations de Lorentz

$T_{AB}$ . La relation entre  $T_{AB}$  et  $T_{A'B'}$  déduite de la figure 1(a) est

$$T_{AB} = \cos \alpha T_{A'B'} \quad (8)$$

en tenant compte du facteur d'échelle  $\epsilon$  on a donc que

$$c\Delta t_{AB} = \epsilon \cos \alpha c\Delta t_{A'B'} = \frac{c\Delta t_{A'B'}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma c\Delta t_{A'B'} \quad (9)$$

### 4.5. Causalité

- a) Sur un dessin, on constate qu'un signal se propageant à une vitesse inférieure ou égale à celle de la lumière émis depuis l'origine, reste dans le cône du futur. L'origine ne peut recevoir du passé que des signaux se propageant à une vitesse inférieure à celle de la lumière.
- b) La relation  $E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$  implique que si  $\beta = v/c > 1$  et que l'on veut une énergie donnée par un nombre réel,  $E \in \mathbb{R}$ , alors  $m$  doit être un nombre imaginaire pur,  $m \in i\mathbb{R}$ .
- c) Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  le signal de réponse a pour équation  $(ct, x) = (ct, \beta ct)$  avec  $\beta = v/c$ . L'équation de cette trajectoire dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  obtenue par une transformation de Lorentz

$$ct' = \gamma' (1 - \beta' \beta) ct \quad (10)$$

$$x' = \gamma' (\beta - \beta') ct \quad (11)$$

$$\beta' := \frac{v'}{c}, \quad \gamma' := \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}}. \quad (12)$$

La position de l'observateur au moment de la réception du signal mesurée dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  est  $x' = L' = \gamma' (\beta - \beta') ct$  donc la durée de propagation du signal dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  est  $ct' = \frac{1-\beta'\beta}{\beta-\beta'} L'$ . Le temps de réception dans  $\mathcal{R}'$  est donc cette durée pour le temps de propagation du signal vers l'origine du référentiel  $\mathcal{R}'$

$$cT' = ct' + \frac{L'}{\beta} = \frac{2\beta - \beta'(1 + \beta^2)}{\beta(\beta - \beta')} L'. \quad (13)$$

- i) Si  $\beta < 1$ , le signal se propage moins vite que la vitesse de la lumière, alors  $cT' > 0$  pour  $0 < v' < v$ , la dernière condition est nécessaire pour que le signal puisse rattraper l'observateur en mouvement.
- ii) Si  $\beta = 1$ , le signal se propage à la vitesse de la lumière, alors  $cT' = 2L'$  pour toutes valeurs  $v' < c$ .
- iii) Si  $\beta > 1$  pour  $v' > 2v/(1 + v^2)$  le temps de réception  $cT' < 0$  ce qui signifie que la réponse a été reçue avant d'avoir été émise.

## 5. Corrigé PC 2 : Composition des vitesses et aberration relativiste

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 18 novembre 2014

### 5.1. Composition des vitesses

- a) La vitesse réduite du mobile  $\mathcal{M}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est donnée par  $\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}} = (dx/cdt, dy/cdt, dz/cdt)$  et dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  par  $\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'} = (dx'/cdt', dy'/cdt', dz'/cdt')$ . Ces vitesses réduites sont reliées par une transformation de Lorentz. On suppose que le mouvement du mobile est arbitraire dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . On suppose aussi que les axes  $\mathcal{R}'$  sont parallèles à ceux de  $\mathcal{R}$ . Comme le mouvement de  $\mathcal{R}'$  se fait selon l'axe  $(\mathcal{O}x)$  du référentiel  $\mathcal{R}$  nous avons

$$cdt = \gamma(v_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})(cdt' + \beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}dx') \quad (1)$$

$$dx = \gamma(v_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})(dx' + \beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}cdt') \quad (2)$$

$$dy = dy' \quad (3)$$

$$dz = dz'. \quad (4)$$

On en déduit la loi de composition des vitesses

$$\beta_{\mathcal{M}/\mathcal{R}}^x := \frac{dx}{cdt} = \frac{\beta_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'}^x + \beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^x}{1 + \beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^x \beta_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'}^x} \quad (5)$$

$$\beta_{\mathcal{M}/\mathcal{R}}^y := \frac{dy}{cdt} = \frac{1}{\gamma(\beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})} \frac{\beta_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'}^y}{1 + \beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^x \beta_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'}^x} \quad (6)$$

$$\beta_{\mathcal{M}/\mathcal{R}}^z := \frac{dz}{cdt} = \frac{1}{\gamma(\beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})} \frac{\beta_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'}^z}{1 + \beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^x \beta_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'}^x}. \quad (7)$$

- b) Si le référentiel  $\mathcal{R}''$  est en mouvement par rapport à l'axe  $(\mathcal{O}x)$ , nous avons alors en appliquant le raisonnement précédant la loi de composition des vitesses

$$\beta_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}}^x = \frac{\beta_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'}^x + \beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^x}{1 + \beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^x \beta_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'}^x}. \quad (8)$$

## 5. Corrigé PC 2 : Composition des vitesses et aberration relativiste

Pour les rapidités nous avons

$$\tanh \phi_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}} = \frac{\tanh \phi_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'} + \tanh \phi_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{1 + \tanh \phi_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \tanh \phi_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'}} \quad (9)$$

$$= \tanh(\phi_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'} + \phi_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}). \quad (10)$$

On en déduit donc que les rapidités sont additives  $\phi_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}} = \phi_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'} + \phi_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ .

c) Le facteur  $k$  s'exprime simplement selon

$$k_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \sqrt{\frac{1 + \beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{1 - \beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}} = \sqrt{\frac{\cosh \phi_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} + \sinh \phi_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\cosh \phi_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} - \sinh \phi_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}} = e^{\phi_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}. \quad (11)$$

Donc la composition des vitesses revient à la multiplication des facteurs  $k_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}} = k_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'} k_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ .

d) Dans le cas général on part des transformations de Lorentz

$$d\vec{r}_{\parallel} = \gamma (d\vec{r}'_{\parallel} + \vec{\beta} c dt') \quad (12)$$

$$d\vec{r}_{\perp} = d\vec{r}'_{\perp}. \quad (13)$$

Donc la vitesse du mobile par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  est donnée par

$$(\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}})_{\parallel} = \frac{(\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'})_{\parallel} + \vec{\beta}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{1 + \vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'} \cdot \vec{\beta}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \quad (14)$$

$$(\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}})_{\perp} = \frac{(\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'})_{\perp}}{\gamma(\beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})(1 + \vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'} \cdot \vec{\beta}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})}. \quad (15)$$

e) Si le mobile est animé d'une vitesse  $c$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}'$  alors  $\|\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'}\| = 1$ . Si on considère alors

$$\|\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}}\|^2 = \frac{1}{(1 + \vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'} \cdot \vec{\beta}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})^2} \left( ((\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'})_{\parallel} + \vec{\beta}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})^2 + \frac{((\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'})_{\perp})^2}{\gamma^2(\beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})} \right). \quad (16)$$

Comme  $((\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'})_{\parallel})^2 + ((\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'})_{\perp})^2 = 1$  on en déduit que

$$\|\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}}\|^2 = \frac{1 + 2\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'} \cdot \vec{\beta}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} + (1 - ((\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'})_{\perp})^2)(\beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})^2}{(1 + \vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'} \cdot \vec{\beta}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})^2}, \quad (17)$$

et en utilisant  $((\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'})_{\parallel})^2 (\beta_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})^2 = (\vec{\beta}_{\mathcal{M}/\mathcal{R}'} \cdot \vec{\beta}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})^2$  on conclut que

$$\|\beta_{\mathcal{M}/\mathcal{R}}\|^2 = 1. \quad (18)$$

Ce qui montre que le mobile se déplace à la vitesse de lumière par rapport au



référentiel  $\mathcal{R}$ .

## 5.2. Effet d'aberration relativiste

### 5.2.1. Effet torche

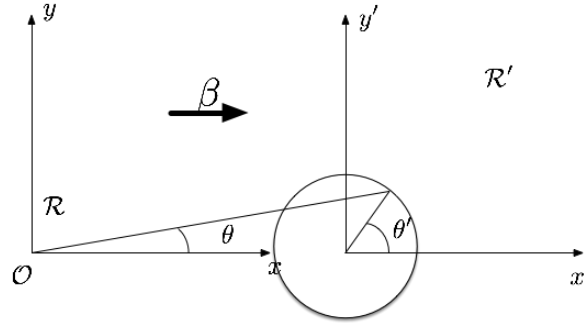


FIGURE 1. – Vue de la source lumineuse en mouvement par l'origine  $\mathcal{O}$  du référentiel  $\mathcal{R}$ . L'angle  $\theta'$  est celui sous lequel est vu l'objet par un observateur au repos dans  $\mathcal{R}'$ .

a) Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  la vitesse des rayons lumineux est donnée par

$$v_x = c \cos \theta \quad (19)$$

$$v_y = c \sin \theta. \quad (20)$$

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  on a

$$v'_x = c \cos \theta' \quad (21)$$

$$v'_y = c \sin \theta'. \quad (22)$$

La relation de composition des vitesses donne

$$v_x = c \cos \theta = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}} = c \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \cos \theta' \beta} \quad (23)$$

$$v_y = c \sin \theta = \frac{v'_y}{\gamma (1 + \frac{v'_y v}{c^2})} = c \frac{\sin \theta'}{\gamma (1 + \beta \cos \theta')}. \quad (24)$$

b) Dans la limite Galiléenne,  $v \rightarrow 0$  alors  $\beta \rightarrow 0$ , l'effet d'aberration géométrique disparaît, l'angle de vue  $\theta$  pour un observateur en mouvement correspond à l'angle

## 5. Corrigé PC 2 : Composition des vitesses et aberration relativiste

de vue  $\theta'$  pour un observateur fixe par rapport à l'objet

$$\cos \theta = \cos \theta' \quad (25)$$

$$\sin \theta = \sin \theta', \quad (26)$$

Dans la limite ultra-relativiste,  $\beta \rightarrow \pm 1$ ,

$$\cos \theta \simeq \frac{\cos \theta' \pm 1}{1 \pm \cos \theta'} = \pm 1 \quad (27)$$

$$\sin \theta \simeq \frac{\sin \theta'}{\gamma (1 \pm \cos \theta')} \rightarrow 0. \quad (28)$$

Lorsque la source s'éloigne  $\beta \sim 1$ , alors  $\theta \sim 0$  et lorsque la source s'approche  $\beta \sim -1$ , alors  $\theta \sim \pi$ . Les rayons lumineux sont concentrés dans la direction de propagation de la source. D'où le nom d'effet torche.

### 5.3. Le paradoxe du mètre incliné

- a) On a ici un exemple d'aberration géométrique. On considère qu'à l'instant  $t = t' = 0$  où le centre de la règle est à l'origine des référentiels du laboratoire et du mobile. Pour l'observateur dans la fusée les rayons lumineux venant de l'arrière de la règle arriveront plus tard que ceux de l'avant de la règle. Ainsi il verra la règle inclinée au dessus de l'axe  $(\mathcal{O}x')$  dans le sens de son mouvement.
- b) On applique les résultats de l'exercice 5.2.1 à l'extrémité droite  $A$  de la règle. Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  du mobile la loi de composition des vitesses donne

$$\tan \phi' := \frac{\beta^{y'}}{\beta^{x'}} = \frac{\beta^y}{(\beta^x + \beta)\gamma} \quad (29)$$

mais comme la règle est parallèle à l'axe  $(\mathcal{O}x)$  alors les rayons lumineux partant de  $A$  suivent une trajectoire avec  $\beta^x = 0$  d'où

$$\tan \phi' = \frac{\beta^y}{\beta \gamma} \quad (30)$$

- c) Il n'y aura pas de collision car dans le référentiel du mobile le mètre n'est pas contracté mais la plaque est inclinée avec le côté droit vers le haut.

## 5.4. Un conducteur relativiste

- a) Comme on s'approche du feu on applique la formule de l'effet Doppler relativiste  $\nu_{\text{obs}} = \nu_{\text{source}} / (\gamma (1 - \beta \cos \theta))$  avec  $\theta = 0$  donc

$$\nu_{\text{vert}} = \frac{\nu_{\text{rouge}}}{\gamma(1 - \beta)} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \nu_{\text{rouge}} \quad (31)$$

Comme  $\nu = c/\lambda$  alors

$$\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \frac{\lambda_{\text{rouge}}}{\lambda_{\text{vert}}} \quad (32)$$

Ce qui donne avec  $\lambda_{\text{rouge}} = 700 \text{ nm}$  et  $\lambda_{\text{vert}} = 546 \text{ nm}$

$$\beta = 0.24 \text{ c} \simeq 73 \cdot 10^6 \text{ m/s} . \quad (33)$$

5. *Corrigé PC 2 : Composition des vitesses et aberration relativiste*

## 6. Corrigé PC 3 : Principes variationnels, équations d'Euler-Lagrange

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 25 novembre 2014

### 6.1. Le pendule simple

Le lagrangien du pendule simple est donné par la somme  $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$  du lagrangien du point de masse  $m_1$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{m_1}{2} \dot{x}^2 \quad (1)$$

et la masse du pendule a pour coordonnées  $x_2 = x + l \sin \varphi$  et  $y_2 = -l \cos \varphi$  (si l'on suppose que le rail a pour position  $y = 0$ ), le pendule est soumis à la force de gravitation de potentiel  $V_2 = mgy_2$  (puisque l'orientation de  $y$  est vers le haut) donc puisque  $\mathcal{L}_2 = T_2 - V_2$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - mgy_2 \quad (2)$$

$$= \frac{m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi) + m_2 gl \cos \varphi \quad (3)$$

### 6.2. Temps propre et équations de Euler-Lagrange

a) La densité de Lagrangien est donnée par  $\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) = \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ . Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)}{\partial x^\mu} \quad (4)$$

soit

$$\frac{d}{ds} (\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\nu) = 0 \quad (5)$$

donc

$$\dot{x}^\mu = a^\mu \quad (6)$$

6. Corrigé PC 3 : Principes variationnels, équations d'Euler-Lagrange

est constante ce qui s'intègre en

$$x^\mu = a^\mu s + x_0^\mu . \quad (7)$$

Ceci est la représentation paramétrique d'un mouvement rectiligne uniforme puisque

$$x^0 = ct = a^0 s + b^0 \quad (8)$$

$$\vec{x} = \vec{a}s + \vec{b} \quad (9)$$

ce qui implique

$$\vec{x} = \vec{a} \frac{ct - b^0}{a_0} + \vec{b} . \quad (10)$$

- b) Le temps propre est donné par  $cd\tau = \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} ds$ . La densité de Lagrangien est donc  $\mathcal{L} = \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ . Les équations d'Euler-Lagrange donnent

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \right) = 0 \quad (11)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} = a^\mu \quad (12)$$

est constant. Ceci implique que  $\eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = 1$ , et que  $\dot{x}^\mu$  est le vecteur constant  $a^\mu$  multiplié par une fonction arbitraire de  $s$

$$\dot{x}^\mu = a^\mu \varphi(s) . \quad (13)$$

En faisant un changement de variable sur la paramètre  $s$  tel que  $ds'/ds = \varphi(s)$  alors

$$\frac{dx^\mu}{ds'} = a^\mu \quad (14)$$

ce qui est le cas étudié dans la question précédente, où l'on a montré que cela implique un mouvement rectiligne uniforme.

On constate bien sûr que  $s'$  est le temps propre car

$$f(s) = \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}} \quad (15)$$

de sorte que

$$ds' = ds \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}} = \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \quad (16)$$

ce qui permet de conclure à l'identification entre  $s'$  et le temps propre.

### 6.3. Formule de Beltrami

On considère une fonctionnelle de la forme

$$\mathcal{U}(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(y(x), \dot{y}(x), x) dx \quad (17)$$

où  $y$  est une fonction de  $x$  et  $\dot{y} := dy/dx$ . On cherche les configurations  $y(x)$  qui rendent cette fonctionnelle extrémale,  $x_0$  et  $x_1$  étant fixées.

a) On écrit que

$$d\mathcal{U} = \mathcal{U}(y_0 + \eta) - \mathcal{U}(y_0) = 0. \quad (18)$$

C'est-à-dire que

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} (F(y_0 + \eta, \dot{y}_0 + \dot{\eta}, x) - F(y_0, \dot{y}_0, x)) dx \quad (19)$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left( \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) dx \quad (20)$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) \eta dx + \left[ \eta \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right]_{x_0}^{x_1}. \quad (21)$$

Pour obtenir la dernière ligne nous avons procédé à une intégration par partie. Avec pour conditions aux limites que les positions  $x_0$  et  $x_1$  sont fixées on a  $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$  alors

$$d\mathcal{U} = 0 = \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) \eta(x) dx, \quad (22)$$

comme cette équation est valable pour tout choix de la fonction  $\eta(x)$  alors

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0. \quad (23)$$

On aurait aussi pu travailler avec d'autres conditions aux limites où les extrémités sont libres mais les variations de  $F$  sont nulles  $\partial F(x)/\partial \dot{y} = 0$  pour  $x = x_0$  et  $x = x_1$ .

b) On considère

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \dot{y} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{dF}{dx}. \quad (24)$$

Puisque  $\partial F/\partial x = 0$  alors

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \ddot{y}. \quad (25)$$

## 6. Corrigé PC 3 : Principes variationnels, équations d'Euler-Lagrange

Ainsi

$$\frac{dE}{dx} = \ddot{y} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} + \dot{y} \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - \left( \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F}{\partial \ddot{y}} \ddot{y} \right) \quad (26)$$

$$= \dot{y} \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial y} \right). \quad (27)$$

Qui est nul par les équations d'Euler-Lagrange pour  $F$ .

- c) Le lagrangien du système est donné par  $\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)$ . Posons  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ . Alors les équation d'Euler-Lagrange impliquent que  $\frac{dp}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -V'(x)$ . On voit que  $p$  ainsi définit est l'impulsion. La fonctionnelle de Beltrami est donnée par

$$E = p\dot{x} - \mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \quad (28)$$

ce qui est la somme de l'énergie cinétique et potentielle de la particule. La formule de Beltrami assure que  $dE/dt = 0$  ce qui est la condition de conservation de l'énergie.

### 6.4. Brachistochrone

- a) On écrit la conservation de l'énergie. L'énergie initiale est  $E = mgh$ . À une altitude  $z$  l'objet a une vitesse  $v$  alors  $E = \frac{mv^2}{2} + mgz$ . Comme  $v^2 = (dx/dt)^2 + (dz/dt)^2 = (1 + (dz/dx)^2) (dx/dt)^2$  On trouve que

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 (1 + \dot{z}^2) = mg(h - z) \quad (29)$$

où  $\dot{z} = dz/dx$ . Ainsi

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2g \frac{h - z}{1 + \dot{z}^2}}. \quad (30)$$

Donc

$$T(z) := \int_{\text{début}}^{\text{fin}} dt = \int_0^d \sqrt{\frac{1 + \dot{z}^2}{2g(h - z)}} dx. \quad (31)$$

- b) On constate que  $f = \sqrt{\frac{1 + \dot{z}^2}{2g(h - z)}}$  ne dépend pas de  $x$ . Donc est nulle la variation par rapport à  $x$  de la fonctionnelle de Beltrami

$$\mathcal{E} = \dot{z} \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} - f. \quad (32)$$

Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{2g(h - z)(1 + \dot{z}^2)}}, \quad (33)$$



on déduit que

$$\frac{1}{\sqrt{1+\dot{z}^2}} = \sqrt{2g(h-z)} \mathcal{E}. \quad (34)$$

On peut réécrire cette équation

$$1 + \dot{z}^2 = \frac{K}{h-z}, \quad K := \frac{1}{2g\mathcal{E}^2}. \quad (35)$$

En posant  $\dot{z} = \tan(\theta/2)$ , comme  $1 + \dot{z}^2 = (\cos \frac{\theta}{2})^{-2}$ . Alors  $z = h - K \cos^2(\theta/2) = h - K(1 + \cos \theta)/2$ . Puisque

$$\dot{z} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} \quad (36)$$

alors

$$\frac{dx}{d\theta} = K \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad (37)$$

En intégrant ces équations on trouve

$$x = x_0 + \frac{K}{2} (\theta + \sin \theta) \quad (38)$$

$$z = h - \frac{K}{2} (1 + \cos \theta). \quad (39)$$

Les conditions initiales sont pour  $\theta = -\pi$  alors  $z = h$  et  $x = x_0 - \frac{K\pi}{2} = 0$  donc  $x_0 = \frac{K\pi}{2}$ . Une représentation graphique est donnée en figure 1

- c) Considérons à nouveau la fonctionnelle temps  $T = \int f dx$  de l'équation (31). Alors avec le changement de variable considéré on trouve que

$$f(z, \dot{z}) dx = \frac{1}{2g\mathcal{E}} d\theta \quad (40)$$

Ainsi

$$T = \frac{\theta_{final} - \theta_{initial}}{2g\mathcal{E}} = \frac{\pi}{2g\mathcal{E}}. \quad (41)$$

Le résultat ne dépend que de la grandeur conservée  $\mathcal{E}$  qui est une constante indépendante de  $x$ , ce qui signifie que le temps de descente est indépendant du point d'où l'objet est lâché.

## 6.5. Caténoïde

- a) Clairement la surface de la bulle de savon est donnée par

$$\mathcal{S} = \int_{-h}^h 2\pi r(z) d\ell(z), \quad (42)$$

6. Corrigé PC 3 : Principes variationnels, équations d'Euler-Lagrange

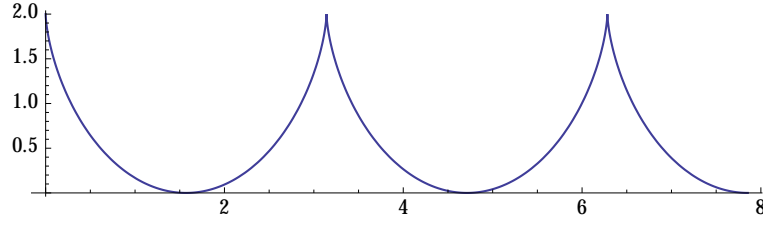


FIGURE 1. – plusieurs arches représentant  $(x(\theta), z(\theta))$  pour  $\theta \in [-\pi, 4\pi]$ .

avec

$$d\ell(z)^2 = dr^2 + dz^2 = dz^2 \left(1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right). \quad (43)$$

Posons  $\dot{r} = dr/dz$ . Donc la surface est donnée

$$\mathcal{S} = 2\pi \int_{-h}^h r(z) \sqrt{1 + \dot{r}(z)^2} dz. \quad (44)$$

- b) L'équation d'Euler-Lagrange est  $d(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{r})/dz = \partial\mathcal{L}/\partial r$  avec  $\mathcal{L} = 2\pi r \sqrt{1 + \dot{r}^2}$  ce qui donne

$$\frac{d}{dz} \frac{r\dot{r}}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}} = \sqrt{1 + \dot{r}^2}, \quad (45)$$

ce qui implique que

$$\frac{r\ddot{r} - \dot{r}^2 - 1}{(1 + \dot{r}^2)^{\frac{3}{2}}} = 0. \quad (46)$$

Comme la fonctionnelle est indépendante de  $z$  alors est conservée la quantité de Beltrami

$$K = \dot{r} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} - \mathcal{L} = -\frac{r}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}}. \quad (47)$$

- c) En combinant l'équation (47) et l'équation d'Euler-Lagrange (45) on trouve que

$$\ddot{r} = \frac{r}{K^2} \quad (48)$$

Donc

$$r(z) = \alpha \exp\left(\frac{z}{K}\right) + \beta \exp\left(-\frac{z}{K}\right). \quad (49)$$

On souhaite que  $r(h) = r(-h) = R$  et que  $r(-z) = r(z)$  pour tout  $-h \leq z \leq h$ , on en déduit que  $r(z) = \alpha' \cosh(z/K)$ . En réinjectant cette expression dans la relation de conservation (47) on trouve

$$1 + \dot{r}^2 = 1 + \frac{\alpha'^2}{K^2} \sinh^2 \frac{z}{K} = \frac{\alpha'^2}{K^2} \cosh^2 \frac{z}{K} \quad (50)$$

ce qui implique que  $\alpha' = K$ . L'équation d'une caténoïde est donc

$$r(z) = K \cosh \frac{z}{K}. \quad (51)$$

La condition que pour  $z = \pm h$  le rayon vaut celui des cercles donne

$$R = K \cosh \frac{h}{K}. \quad (52)$$

Pour  $K \rightarrow 0$  et  $K \rightarrow \infty$  le membre de droite tend vers  $+\infty$ . Il y a un minimum pour  $\tanh \frac{h}{K} = \frac{K}{h}$  soit  $h \sim 1.9968 K$ . Il y a donc un rayon minimal, pour que la caténoïde puisse exister  $R > h \sinh \frac{h}{K}$ . Pour  $R$  satisfaisant cette relation l'équation a deux solutions pour  $K$  comme le montre le graphique ci-dessous

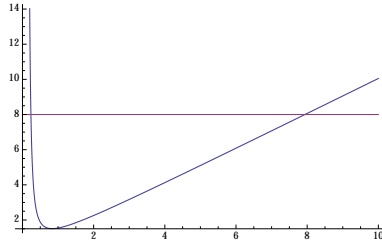


FIGURE 2. – Représentation de l'équation  $R = K \cosh(h/K)$

6. *Corrigé PC 3 : Principes variationnels, équations d'Euler-Lagrange*

## 7. Corrigé PC 3 : Espace–temps et formalisme quadri-dimensionnel

donnée en 2012 et 2013

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 22 novembre 2013

### 7.1. Quadri-vecteurs vitesse et accélérations

Le quadri-vecteur accélération  $\mathbf{A}$  est défini comme la dérivée du quadri-vecteur vitesse  $\mathbf{V}$  par rapport au temps propre  $\tau$  :  $\mathbf{A} = d\mathbf{V}/d\tau$ .

a) Par définition  $\mathbf{V} := d\mathbf{r}/d\tau$  comme  $d\mathbf{r} = (cdt, d\vec{r})$  et en utilisant la relation entre le temps propre et le temps  $t$   $d\tau = dt/\gamma$  on en déduit que  $\mathbf{V} = \gamma(c, \vec{v})$ . La norme de ce quadri-vecteur  $\mathbf{V}^2 = (V^0)^2 - (V^1)^2 - (V^2)^2 - (V^3)^2 = \gamma^2(c^2 - \vec{v}^2) = c^2$ .

b) L'accélération est définie par  $\mathbf{A} = d\mathbf{V}/d\tau$  on en déduit que

$$\mathbf{A} = \gamma \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \gamma \left( \frac{d\gamma}{dt} c, \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma \vec{a} \right). \quad (1)$$

avec

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{a}. \quad (2)$$

Pour calculer  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$  on peut procéder de deux façons. La première est de différentier  $\mathbf{V}^2 = c^2$  par rapport à  $\tau$  pour obtenir  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = 0$ . Ou de faire le calcul direct à partir des composantes

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \gamma^2 \left( \frac{d\gamma}{dt} (c^2 - \vec{v}^2) - \gamma \vec{a} \cdot \vec{v} \right) \quad (3)$$

$$= \gamma^2 \left( \frac{d\gamma}{dt} \frac{c^2}{\gamma} - \gamma \vec{a} \cdot \vec{v} \right) \quad (4)$$

$$= 0. \quad (5)$$

c) On définit le quadri-vecteur d'énergie-impulsion  $\mathbf{P} = m\mathbf{V} = \gamma m(c, \vec{v})$ . On a que  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = m^2 \mathbf{V}^2 = m^2 c^2$ . Par définition les composantes du quadri-vecteur impulsions sont  $\mathbf{P} = (\mathcal{E}/c, \gamma m \vec{v})$  on a donc que  $\mathcal{E} = \gamma m c^2$ .

## 7. Corrigé PC 3 : Espace-temps et formalisme quadri-dimensionnel

- d) Puisque  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = 0$  on en déduit que  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = 0$  donc  $\mathbf{P}^2$  est une constante. On en déduit que  $\mathcal{E}^2/c^2 - \gamma^2 m^2 \vec{v}^2$  est une constante. Nous avons vu à la question précédente que cette constante vaut  $m^2 c^2$ . Donc  $\mathcal{E}^2/c^2 = m^2 c^2 (1 + \gamma^2 \vec{v}^2/c^2) = m^2 c^2 (1 + \vec{\beta}^2/(1 - \vec{\beta}^2)) = \gamma^2 m^2 c^2$ .

Ces relations sont très importantes pour obtenir des quantités conservées en cinématique relativiste (chocs et diffusions entre particules, créations de particules, ...).

### 7.2. Cylindre en rotation

- a) La transformation de Lorentz entre  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  est donnée par

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad (6)$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad (7)$$

$$y' = y \quad (8)$$

$$z' = z, \quad (9)$$

donc dans  $\mathcal{R}'$  nous avons  $(y')^2 + (z')^2 = y^2 + z^2 = \rho^2$  donc le cylindre a toujours le rayon  $\rho$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . La longueur est contractée car si dans  $\mathcal{R}$  on a  $L = x_B - x_A$  où  $A$  et  $B$  sont les extrémités du cylindre. Dans  $\mathcal{R}'$  on a

$$L' = x'_B - x'_A = \gamma(x_B - x_A - \beta c(t_B - t_A)) \quad (10)$$

mais dans  $\mathcal{R}'$

$$c(t'_B - t'_A) = 0 = \gamma(c(t_B - t_A) - \beta(x_B - x_A)) \quad (11)$$

donc

$$L' = x'_B - x'_A = \gamma(1 - \beta^2)(x_B - x_A) = \frac{L}{\gamma}. \quad (12)$$

- b) Dans le référentiel fixe  $\mathcal{R}$  un point marqué sur le cylindre a pour équation temporelle

$$P_{\mathcal{R}} = (x, \rho \cos(\omega t), \rho \sin(\omega t)). \quad (13)$$

Avec les relation de changement de référentiel  $ct = \gamma(ct' + \beta x')$  on a dans le référentiel  $\mathcal{R}'$

$$P_{\mathcal{R}'} = (x', \rho \cos(\omega \gamma(t' + \beta x'/c)), \rho \sin(\omega \gamma(t' + \beta x'/c))). \quad (14)$$

On voit donc que le cylindre tourne maintenant à la vitesse angulaire  $\omega \gamma$  et que les points sont décalés d'un angle  $\alpha = \omega \gamma \beta / c$ .

## 8. Corrigé PC 4 : Invariances et lois de conservation ; théorie lagrangienne relativiste

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 2 décembre 2014

### 8.1. Lagrangien du champ électromagnétique

a) Par définition  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  donc

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} \quad (1)$$

$$= \partial^\rho(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \partial^\mu(\partial^\nu A^\rho - \partial^\rho A^\nu) + \partial^\nu(\partial^\rho A^\mu - \partial^\mu A^\rho) = 0, \quad (2)$$

où l'on a utilisé que  $\partial^\mu \partial^\rho A^\nu = \partial^\rho \partial^\mu A^\nu$ .

b) Par définition de la métrique  $(-, -, -)$  on a que  $w_i = -w^i$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Ainsi le produit scalaire  $\vec{v} \cdot \vec{w} = -\sum_{i=1}^3 v^i w^i = v^i w_i$ .

c) Par définition

$$w_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} f^{jk} = \epsilon_{ijk} \partial^j v^k. \quad (3)$$

Le produit vectoriel entre deux vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  est défini par

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x^2 y^3 - x^3 y^2 \\ x^3 y^1 - x^1 y^3 \\ x^1 y^2 - x^2 y^1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

C'est-à-dire que  $(\vec{x} \times \vec{y})^i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x^j y^k$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Donc les composantes covariantes

$$(\vec{x} \times \vec{y})_i = -(\vec{x} \times \vec{y})^i = -\epsilon_{ijk} x^j y^k. \quad (5)$$

On applique avec  $\vec{x} = \vec{\nabla} := (\partial/\partial x^i = \partial_i = -\partial^i)$  et  $\vec{y} = \vec{v}$  pour obtenir  $w_i = (\vec{\nabla} \times \vec{v})_i$ .

d) On écrit les équations (1) en composantes

$$\partial^0 F^{ij} + \partial^i F^{j0} + \partial^j F^{0i} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (6)$$

8. Corrigé PC 4 : Invariances et lois de conservation ; théorie lagrangienne relativiste

En lisant les composantes de  $F^{\mu\nu}$  on constate que  $B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}$  et  $F^{i0} = E^i/c = -F^{0i}$  On a ainsi que

$$\frac{1}{2}\partial^0\epsilon_{kij}F^{ij} + \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\partial^i\frac{E^j}{c} - \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\partial^j\frac{E^i}{c} = 0 \quad (7)$$

c'est-à-dire

$$c\partial^0 B_k + \epsilon_{kij}\partial^i E^j = 0 \quad (8)$$

comme  $\epsilon_{kij}\partial^i E^j = (\vec{\nabla} \times \vec{E})_k$  d'après la question précédente et puisque  $c\partial^0 = \partial/\partial t$  on en déduit que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (9)$$

On examine les équations

$$\partial^i F^{jk} + \partial^j F^{ki} + \partial^k F^{ij} = 0 \quad (10)$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \left( \partial^i F^{jk} + \partial^j F^{ki} + \partial^k F^{ij} \right) = 0 \quad (11)$$

c'est-à-dire

$$\partial^i B_i + \partial^j B_j + \partial^k B_k = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (12)$$

e) En supposant que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (13)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (14)$$

On vérifie que les équations de Maxwell sont satisfaites

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \sum_{i=1}^3 \partial^i (\vec{\nabla} \times \vec{A})_i = - \sum_{i,j,k=1}^3 \partial^i (\epsilon_{ijk} \partial^j A^k) = 0, \quad (15)$$

car  $\epsilon_{ijk}\partial^i\partial^j A^k = 0$  puisque  $\epsilon$  est antisymétrique en les indices  $i$  et  $j$  et les dérivées partielles commutent. Également

$$\vec{\nabla} \times \left( -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi)}_{=0} - \frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (16)$$

f) Ajoutant à  $\vec{A}$  la quantité  $\vec{\nabla}\chi$  laisse invariant le champs magnétique  $\vec{B}$  car  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\chi) = 0$ . Pour  $\vec{E}$  on considère la variation de la définition sous la transformation



### 8.1. Lagrangien du champ électromagnétique

de jauge

$$\delta \vec{E} = -\vec{\nabla} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\nabla} \chi}{\partial t} = 0. \quad (17)$$

g) Un calcul direct donne que

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2 \sum_{i=1}^3 F^{0i} F_{0i} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 F^{ij} F_{ij} \quad (18)$$

$$= -2 \left( \frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2 \right). \quad (19)$$

On constate ainsi que  $\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2$  est un invariant relativiste.

h) En réinjectant les expressions pour les champs électrique et magnétique en fonction des potentiels, le lagrangien prend la forme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\mu_0} \left[ \frac{1}{c^2} \left( \vec{\nabla} \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 - (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right] - \varrho \phi + \vec{j} \cdot \vec{A}. \quad (20)$$

On calcule les variations du lagrangien par rapport aux potentiels

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{1}{\mu_0 c^2} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) - \varrho \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{A}} = \vec{j} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}). \quad (22)$$

On calcule aussi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{A}}} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi \right). \quad (24)$$

On a donc l'équation d'Euler-Lagrange pour  $\phi$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad (25)$$

qui donne

$$-\vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \mu_0 c^2 \varrho, \quad (26)$$

En utilisant la définition du champ électrique en fonction des potentiels on constate

8. Corrigé PC 4 : Invariances et lois de conservation ; théorie lagrangienne relativiste

que l'équation (26) donne

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mu_0 c^2 \varrho = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \quad (27)$$

Pour le potentiel vecteur  $\vec{A}$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{A}}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{A}} \quad (28)$$

implique que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{j}. \quad (29)$$

En utilisant la définition du champ magnétique en fonction des potentiels on constate que l'équation (29) donne

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}. \quad (30)$$

En utilisant la condition de jauge  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$  on déduit que les potentiels satisfont une équation d'onde

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -\mu_0 c^2 \varrho \quad (31)$$

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (32)$$

Avec  $\Delta = \vec{\nabla}^2$  le Laplacien. Le permittivité du vide  $\epsilon_0$  et la perméabilité du vide  $\mu_0$  sont reliées par la relation  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ .

- i) Sous la transformation de jauge  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  est invariant. Donc pour toutes fonction  $\chi(t, \vec{x})$  on a

$$\delta_{\text{jauge}} \mathcal{L} = \int \left( -\varrho \frac{\partial \chi}{\partial t} + \vec{j} \cdot (-\vec{\nabla} \chi) \right) dt d^3 \vec{x} \quad (33)$$

$$= \int \chi \left( \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right) dt d^3 \vec{x}. \quad (34)$$

où nous avons intégré par partie en supposant que les termes de bord s'annulent. On voit donc que le lagrangien est invariant si et seulement si

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (35)$$

Il sera démontré dans le second devoir à la maison que cette équation de continuité est une conséquence des équation de Maxwell.

## 8.2. Lagrangien d'une particule dans un champ électromagnétique

a) On calcule le moment conjugué

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\vec{A}. \quad (36)$$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = -q \left( \vec{\nabla} \phi - \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) \right). \quad (37)$$

On remarque

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}. \quad (38)$$

donc si on pose  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  on a

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = -q \left( \vec{\nabla} \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left( \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \right) \right). \quad (39)$$

Comme

$$\vec{v} \times \vec{B} = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}, \quad (40)$$

et puisque  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \partial \vec{A} / \partial t$  on en déduit que

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (41)$$

b) La relation de conservation de l'énergie  $mc^2 = (\mathcal{E}/c)^2 - \vec{p}^2$  avec  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$  implique

$$0 = \frac{2}{c^2} \mathcal{E} \frac{d\mathcal{E}}{dt} - 2\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (42)$$

$$= \frac{2}{c^2} \mathcal{E} \frac{d\mathcal{E}}{dt} - 2q\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (43)$$

Donc

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\vec{v} \cdot \vec{E}. \quad (44)$$

On retrouve le résultat que seul la force électrique contribue au travail.

c) On peut maintenant combiner les deux équations (44) et (41) en une seule sur le quadri-vecteur impulsion  $\mathbf{P}$  selon

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \left( \frac{\frac{d\mathcal{E}}{cdt}}{\frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt}} \right) = \gamma \left( \frac{q\vec{v} \cdot \frac{\vec{E}}{c}}{q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})} \right). \quad (45)$$

8. Corrigé PC 4 : Invariances et lois de conservation ; théorie lagrangienne relativiste

Comme le quadri-vecteur vitesse a pour composantes  $\mathbf{U} = \gamma(c, \vec{v})$  on en déduit que

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}U_\nu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (46)$$

d) Le premier temps de l'action décrit l'évolution de la particule le long de sa ligne d'univers donc

$$-mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \gamma dt = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau, \quad (47)$$

où nous avons utilisé la relation  $d\tau = dt/\gamma = \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} dt$  entre le temps  $t$  et le temps propre  $\tau$ . En introduisant le quadri-vecteur  $\mathbf{A} = (\phi/c, \vec{A})$ , comme le quadri-vecteur vitesse  $\mathbf{U} = \gamma(c, \vec{v})$  alors  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} = \gamma(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})$ , et le second terme de l'action s'écrit

$$-q \int_{t_1}^{t_2} q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) dt = -q \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \frac{dt}{\gamma} = -q \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} d\tau. \quad (48)$$

De cette formulation on déduit facile les équations du mouvement obtenues précédemment

Pour cela on remarque que  $\mathbf{U}^2 = c^2$  donc le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = -(m\mathbf{U}^2 + q\mathbf{U} \cdot \mathbf{A}). \quad (49)$$

En utilisant que  $\mathbf{U}^2 = u^\mu u_\mu$  varions par rapport à  $x_\mu$  et  $u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$ . Les équations d'Euler-Lagrange donnent

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_\mu} = -m \frac{du^\mu}{d\tau} - q \frac{dA^\mu}{d\tau} \quad (50)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} = -q U_\nu \partial^\mu A^\nu \quad (51)$$

Ce qui implique que

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = q \left( U_\nu \partial^\mu A^\nu - \frac{dA^\mu}{d\tau} \right) \quad (52)$$

$$= q U_\nu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu). \quad (53)$$

Comme  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  on retrouve bien les équations du mouvement.

## 9. Corrigé PC5 : Mécanique relativiste

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 9 décembre 2014

### 9.1. Théorème de la composante nulle

- a) On suppose que  $\mathbf{A} = (0, \vec{A})$  dans tous les référentiels Lorentziens. Écrivons la transformation de Lorentz entre deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . La loi de transformation est celle vue en PC 3 (et le rappel donné dans la feuille de PC)

$$0 = \gamma(0 - \vec{\beta} \cdot \vec{A}) \quad (1)$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \gamma \vec{\beta} \left( \frac{\gamma}{\gamma + 1} \vec{\beta} \cdot \vec{A} \right). \quad (2)$$

Où l'on a utilisé que les composantes temporelles sont nulles dans tous les référentiels. En utilisant la première équation on en déduit que  $\vec{A} = \vec{A}'$  qui dans la première équation donne  $\vec{\beta} \cdot \vec{A} = 0$  pour tout  $\vec{\beta}$ . On déduit donc que  $\vec{A} = 0$  et que  $\mathbf{A} = 0$ . On le résultat aussi qu'un quadri-vecteur dont les composantes spatiales sont nulles dans tous les référentiels. Alors le quadri-vecteur est nul.

Nous avons bien sûr, un résultat équivalent pour un quadri-vecteur dont les composantes spatiales sont nulles dans tous les référentiels.

- b) Soit  $\mathbf{P} = (P^0, \vec{P})$  un quadri-vecteur de genre temps  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} > 0$ . On cherche un référentiel où  $\vec{P} = 0$ . On considère une transformation de Lorentz telle qu'il existe un référentiel où ses composantes sont données par  $\mathbf{P} = (P^{0'}, \vec{0})$

$$P^0 = \gamma P^{0'} \quad (3)$$

$$\vec{P} = \gamma \vec{\beta} P^{0'}. \quad (4)$$

Donc on voit si l'on choisit pour la vitesse relative réduite du référentiel  $\mathcal{R}'$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{P}}{P^0}. \quad (5)$$

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  le quadri-vecteur aura  $\vec{P}' = 0$ . On vérifie bien sûr que

$$\mathbf{P}^2 = (P^{0'})^2 = \frac{(P^0)^2}{\gamma^2} = (P^0)^2 \left( 1 - \frac{\vec{P}^2}{(P^0)^2} \right) = (P^0)^2 - \vec{P}^2. \quad (6)$$

## 9. Corrigé PC5 : Mécanique relativiste

- c) Pour la quadri-vecteur  $\mathbf{P}^{tot} = \mathbf{P}^f - \mathbf{P}^i$  a pour composantes  $\mathbf{P}^{tot} = (\mathcal{E}^{finale} - \mathcal{E}^{initiale}, \vec{P}^f - \vec{P}^i)$ . La conservation de l'énergie  $\mathcal{E}^{finale} - \mathcal{E}^{initiale} = 0$  est vérifiée dans tous les référentiels donc dans tous les référentiels la composante temporelle de  $\mathbf{P}^{tot}$  est nulle. D'après la question a) on en déduit que sa composante spatiale est nulle. C'est-à-dire que nous avons la conservation de l'impulsion dans tous les référentiels.

### 9.2. Masse invariante et référentiel du centre de masse

Considérons un système de particules libres de masses  $m_i$ .

- a) On calcule  $(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2$

$$(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2 = \mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2 + 2\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 \quad (7)$$

Dans le référentiel où la particule 1 est au repos  $\mathbf{P}_1 = (P_1^0, 0)$  donc

$$(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2 = \mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2 + 2P_1^0 P_2^0. \quad (8)$$

Comme  $P_i^0 \geq \sqrt{\mathbf{P}_i^2}$  avec  $i = 1, 2$  pour un particule de genre temps où lumière (dans ce cas on a égalité). Donc

$$(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2 \geq (\sqrt{\mathbf{P}_1^2} + \sqrt{\mathbf{P}_2^2})^2 \quad (9)$$

d'où le résultat. Pour un système de plusieurs particules telles que  $\mathbf{P}_i = (m_i c, 0)$ , on a donc que

$$\sqrt{\mathbf{P}_{tot}^2} \geq \sum_i \sqrt{\mathbf{P}_i^2} = \sum_i m_i c. \quad (10)$$

- b) Si les particules sont au repos les unes par rapport aux autres alors  $\mathbf{P}_i = (\mathcal{E}_i/c, 0)$  et  $\mathbf{P}^{tot} = \sum_i \mathbf{P}_i = (\sum_i \mathcal{E}_i/c, 0) = (\sum_i m_i c, 0)$ . Donc  $s = (\mathbf{P}^{tot})^2 = (\sum_i m_i c)^2$ .
- c) Par définition  $\mathbf{P}^{tot} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ . On a que  $s = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2$ . On suppose que les deux particules forment un état lié de masse  $m_t$  donc  $s = (m_t c)^2$ . On développe l'expression pour  $s$

$$s = \mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2 + 2\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 \quad (11)$$

$$= (m_1 c)^2 + (m_2 c)^2 + 2m_1 c P_2^0 \quad (12)$$

où l'on a utilisé que la particule 1 est au repos donc  $\mathbf{P}_1 = (m_1 c, 0)$ . L'énergie de la particule 2 est  $E_2 = P_2^0 c$

$$E_2 = \frac{m_t^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_1} c^2. \quad (13)$$

d) L'énergie totale du système initial est

$$E_{tot} = m_1 c^2 + E_2 = \frac{m_t^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_1} c^2. \quad (14)$$

Dans le référentiel du centre de masse  $\mathbf{P}^{tot} = (m_t c, \vec{0})_{\text{CM}}$  et dans le référentiel du laboratoire  $\mathbf{P}^{tot} = \gamma^{\text{CM}}(m_t c, \vec{p}_t)$ . Donc  $\gamma^{\text{CM}} m_t c = E_{tot}/c$  d'où

$$\gamma^{\text{CM}} = \frac{m_t^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_1 m_t}. \quad (15)$$

Comme  $\gamma^{\text{CM}} \geq 1$  il faut que

$$\frac{m_t^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_1 m_t} \geq 1 \Leftrightarrow m_t \geq m_1 + m_2. \quad (16)$$

La masse total est supérieure à la masse des constituants car entre en jeu l'énergie de liaison. Dans la limite non relativiste on a  $\gamma^{\text{CM}} \simeq 1$  donc  $m_t \simeq m_1 + m_2$ .

e) Pour cela on applique la question b) de l'exercice précédant donc

$$\vec{v}^{\text{CM}} = \beta^{\text{CM}} c = \frac{\vec{p}_{tot}}{P_{tot}^0} c = \frac{\vec{p}_{tot} c^2}{\mathcal{E}_{tot}}. \quad (17)$$

f) On calcule donc

$$\gamma^{\text{CM}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{p}_{tot}^2 c^2}{\mathcal{E}_{tot}^2}}} = \frac{\mathcal{E}_{tot}}{c \sqrt{\mathcal{E}_{tot}^2/c^2 - \vec{p}_{tot}^2}} \quad (18)$$

en utilisant que  $\mathcal{E}_{tot}^2/c^2 - \vec{p}_{tot}^2 = \mathbf{P}_{tot}^2 = (m_t c)^2$  et l'expression déduite à la question d) pour l'énergie totale donc

$$\gamma^{\text{CM}} = \frac{m_t^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_1 m_t}. \quad (19)$$

### 9.3. Effet Compton

On considère la diffusion de rayon  $X$  sur du graphite. On considère un électron  $e^-$  au repos percuté par un photon  $\gamma$ . Après le choc le photon et l'électron diffusent. Nous avons la réaction suivante

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^- \quad (20)$$

a) La relation de conservation de l'impulsion donne que

$$\mathbf{P}_\gamma^i + \mathbf{P}_{e^-}^i = \mathbf{P}_\gamma^f + \mathbf{P}_{e^-}^f. \quad (21)$$

## 9. Corrigé PC5 : Mécanique relativiste

Avec l'impulsion initiale et finale du photon

$$\mathbf{P}_\gamma^i = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}^i}{c} = \frac{\hbar\omega_i}{c} \\ \vec{p}^i = \hbar\vec{k}^i \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{P}_\gamma^f = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}^f}{c} = \frac{\hbar\omega_f}{c} \\ \vec{p}^f = \hbar\vec{k}^f \end{pmatrix} \quad (23)$$

L'électron initial est au repos donc

$$\mathbf{P}_{e^-}^i = \begin{pmatrix} m_e c \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

et l'électron final a pour impulsion

$$\mathbf{P}_{e^-}^f = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}^f}{c} \\ \vec{p}^f \end{pmatrix}. \quad (25)$$

La relation de conservation de la quadri-impulsion donne

$$\hbar(\omega_i - \omega_f) = \mathcal{E}^f - m_e c^2. \quad (26)$$

La conservation de l'impulsion

$$\hbar(\vec{k}^i - \vec{k}^f) = p^f. \quad (27)$$

b) Avec les expression données précédemment on trouve que

$$(\mathbf{P}_\gamma^i - \mathbf{P}_\gamma^f)^2 = (\mathbf{P}_\gamma^i)^2 + (\mathbf{P}_\gamma^f)^2 - 2\mathbf{P}_\gamma^i \cdot \mathbf{P}_\gamma^f \quad (28)$$

Pour le photon nous avons  $(\mathbf{P}_\gamma^i)^2 = (\mathbf{P}_\gamma^f)^2 = 0$  donc

$$(\mathbf{P}_\gamma^i - \mathbf{P}_\gamma^f)^2 = -2\hbar^2 \left( \frac{\omega_i \omega_f}{c^2} - \vec{k}^i \cdot \vec{k}^f \right) \quad (29)$$

$$= -2\hbar^2 \frac{\omega_i \omega_f}{c^2} (1 - \cos \theta), \quad (30)$$

où l'on a utilisé  $\vec{k}^i \cdot \vec{k}^f = |\vec{k}^i| |\vec{k}^f| \cos \theta$  et  $|\vec{k}^i| = \omega_i/c$  et  $|\vec{k}^f| = \omega_f/c$ .

c) On calcule

$$(\mathbf{P}_{e^-}^i - \mathbf{P}_{e^-}^f)^2 = (\mathbf{P}_{e^-}^i)^2 + (\mathbf{P}_{e^-}^f)^2 - 2\mathbf{P}_{e^-}^i \cdot \mathbf{P}_{e^-}^f \quad (31)$$

$$= 2m_e(m_e c^2 - \mathcal{E}_{e^-}^f), \quad (32)$$

La conservation de l'énergie implique  $\mathcal{E}_{e^-}^f = \hbar(\omega_i - \omega_f) + m_e c^2$ . Donc

$$(\mathbf{P}_{e^-}^i - \mathbf{P}_{e^-}^f)^2 = 2m_e \hbar(\omega_f - \omega_i). \quad (33)$$



d) On écrit maintenant que  $(\mathbf{P}_{e-}^i - \mathbf{P}_{e-}^f)^2 = (\mathbf{P}_\gamma^i - \mathbf{P}_\gamma^f)^2$ . Donc

$$2m_e\hbar(\omega_f - \omega_i) = -2\hbar^2 \frac{\omega_i\omega_f}{c^2} (1 - \cos\theta). \quad (34)$$

donc

$$1 - \cos\theta = \frac{m_e c^2}{\hbar} \left( \frac{1}{\omega_f} - \frac{1}{\omega_i} \right) \quad (35)$$

Comme  $\lambda = 2\pi c/\omega$  d'où

$$1 - \cos\theta = \frac{m_e c}{h} (\lambda_f - \lambda_i) = m_e c^2 \left( \frac{1}{\mathcal{E}_f} - \frac{1}{\mathcal{E}_i} \right). \quad (36)$$

En déduire la relation entre l'angle de diffusion et la différence des longueur d'ondes des photons initial et final. On rappelle que  $\mathcal{E} = hc/\lambda$ .

On constate que pour une énergie initiale donnée  $\mathcal{E}_i$  l'énergie finale  $\mathcal{E}_f$  est minimale (ou la longueur d'onde  $\lambda_f$  est maximale) lorsque  $1 - \cos\theta$  est maximal donc  $\theta = \pi$ ,

$$\frac{1}{\mathcal{E}_f} = \frac{1}{\mathcal{E}_i} + \frac{2}{m_e c^2}. \quad (37)$$

Pour une source de Césium 137 émettant des photons d'énergie  $\mathcal{E}_\gamma^i = 662 \text{ KeV}$ , l'énergie des photons finaux est maximale, lorsque  $\lambda^f$  est minimale. Ce qui est réalisé pour  $\theta = \pi$ . On trouve alors  $\mathcal{E}_\gamma^f = 184.35 \text{ KeV}$ .

9. *Corrigé PC5 : Mécanique relativiste*

# 10. Corrigé PC 6 : Relativité et électromagnétisme

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 16 décembre 2014

## 10.1. Loi de transformations

- a) Les champs électrique et magnétique sont les composantes du tenseur électromagnétique

$$F^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & -E^x/c & -E^y/c & -E^z/c \\ E^x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E^y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E^z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

La loi de transformation de ce tenseur est

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma} \quad (2)$$

avec l'expression d'une transformation de Lorentz générale

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma \quad (3)$$

$$\Lambda^0{}_i = -\gamma\beta_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

$$\Lambda^i{}_0 = -\gamma\beta^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

$$\Lambda^i{}_j = \delta^i_j + \frac{\gamma}{\gamma+1}\beta^i\beta_j. \quad (6)$$

En appliquant cette transformation et en utilisant les identifications  $F^{0i} = -E^i$  et  $B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}$  on trouve la loi de transformation des champs.

Pour le cas d'une transformation de Lorentz selon l'axe ( $\mathcal{O}x$ ) on a

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

10. Corrigé PC 6 : Relativité et électromagnétisme

on vérifie que

$$-E'^x/c = F'^{0x} = \Lambda^0_\mu \Lambda^x_\nu F^{\mu\nu} \quad (8)$$

$$= (\gamma F^{0\nu} - \gamma \beta F^{x\nu}) \Lambda^x_\nu \quad (9)$$

$$= (\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2) (-E^x/c) = -E^x/c \quad (10)$$

et

$$-E'^y/c = F'^{0y} = \Lambda^0_\mu \Lambda^y_\nu F^{\mu\nu} \quad (11)$$

$$= (\gamma F^{0\nu} - \gamma \beta F^{x\nu}) \Lambda^y_\nu \quad (12)$$

$$= \gamma F^{0y} - \gamma \beta F^{xy} \quad (13)$$

$$= -\gamma E^y/c - \gamma \beta B_z. \quad (14)$$

b) On a vu en PC4 que  $I_1 = \vec{E}^2/c^2 - \vec{B}^2 = -F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}/2$  et dans le second devoir à la maison que  $I_2 = \vec{E} \cdot \vec{B} = -c\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}/8$  donc ces quantités sont bien invariantes de Lorentz. Sinon on peut vérifier en utilisant les lois de transformations précédentes que ces quantités sont invariantes.

c) S'il existe un référentiel  $\mathcal{R}'$  où  $\vec{E}' = 0$ , dans ce référentiel  $I_2 = \vec{E}' \cdot \vec{B}' = 0$  et  $I_1 = -(\vec{B}')^2$ . Donc il faut que dans tous les référentiels  $\mathcal{R}$  que le champ électrique soit orthogonal au champ magnétique, et que  $\vec{E}^2 \leq c^2 \vec{B}^2$ . En utilisant les transformations de Lorentz entre le référentiel  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}$  on trouve que  $\vec{E} = -c\vec{\beta} \times \vec{B}$ . On vérifie bien que  $I_2 = \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$  et que  $I_1 = -(\vec{B}^2/\gamma^2 + (\vec{\beta} \cdot \vec{B})^2) < 0$

d) Dans l'approximation Galiléenne au premier ordre en  $v/c$  on trouve que

$$\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel; \quad \vec{E}'_\perp = \vec{E}_\perp + \vec{v} \times \vec{B}_\perp \quad (15)$$

$$\vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel; \quad \vec{B}'_\perp = \vec{B}_\perp - \frac{\vec{v} \times \vec{E}_\perp}{c^2}. \quad (16)$$

donc

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (17)$$

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}. \quad (18)$$

e) On prend le champ selon l'axe  $(\mathcal{O}y)$  et on fait une transformation de Lorentz selon l'axe  $(\mathcal{O}z)$  avec  $\vec{B} = 0$ . Donc

$$E'_x = 0 \quad (19)$$

$$E'_y = \gamma E_y \quad (20)$$

$$E'_z = 0, \quad (21)$$

## 10.2. Mouvement quand les champs sont parallèles

et

$$B'_x = \frac{\gamma\beta}{c} E_y \quad (22)$$

$$B'_y = 0 \quad (23)$$

$$B'_z = 0, \quad (24)$$

comme  $\vec{E}' = \gamma \vec{E}$  on trouve donc que

$$\vec{B}' = -\frac{\vec{\beta}}{c} \times \vec{E}'. \quad (25)$$

Dans la limite ultra-relativiste, on a une configuration avec  $c\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$  et  $\vec{n}^2 = 1$ . Les champs sont orthogonaux et égaux en norme. Les champs sont orthogonaux à la direction de propagation selon l'axe ( $\mathcal{O}z$ ). On a donc la description d'une onde électromagnétique.

## 10.2. Mouvement quand les champs sont parallèles

On se place dans la configuration telle que  $\vec{E} = (0, 0, E)$  et  $\vec{B} = (0, 0, B)$ .

- a) On va en cours que l'équation d'une particule chargée soumise à un champs électromagnétique est

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}U_\nu \quad (26)$$

donc puisque  $\mathbf{P} = m\mathbf{U}$  on a

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{q}{m} F^{\mu\nu}U_\nu. \quad (27)$$

- b) Les équations du mouvement deviennent

$$\frac{dU^0}{d\tau} = \frac{q}{m} F^{0\nu}U_\nu = \frac{qE}{mc} U^3 \quad (28)$$

$$\frac{dU^1}{d\tau} = \frac{qB}{m} U^2 \quad (29)$$

$$\frac{dU^2}{d\tau} = -\frac{qB}{m} U^1 \quad (30)$$

$$\frac{dU^3}{d\tau} = \frac{qE}{mc} U^0. \quad (31)$$

10. Corrigé PC 6 : Relativité et électromagnétisme

On a donc le système d'équations du second ordre

$$\frac{d^2 U^0}{d\tau^2} = \left(\frac{qE}{mc}\right)^2 U^0 \quad (32)$$

$$\frac{d^2 U^3}{d\tau^2} = \left(\frac{qE}{mc}\right)^2 U^3, \quad (33)$$

dont la solution est donnée par

$$U^0 = u_-^3 \cosh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) + u_+^3 \sinh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) \quad (34)$$

$$U^3 = u_+^3 \cosh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) + u_-^3 \sinh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right), \quad (35)$$

où l'on a utilisé les équations (28) et (31) pour relier les coefficients. Pour les autres coordonnées nous avons

$$\frac{d^2 U^1}{d\tau^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 U^1 \quad (36)$$

$$\frac{d^2 U^2}{d\tau^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 U^2. \quad (37)$$

dont la solution est donnée par

$$U^1 = u_+^1 \cos\left(\frac{qB}{m}\tau\right) + u_-^1 \sin\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) \quad (38)$$

$$U^2 = u_-^1 \cos\left(\frac{qB}{m}\tau\right) + u_+^1 \sin\left(\frac{qB}{m}\tau\right). \quad (39)$$

où l'on a utilisé les équations (29) et (30) pour relier les coefficients. Si on suppose les conditions initiales  $\vec{U} = (\gamma v, 0, 0)$  pour  $\tau = 0$  on trouve que

$$U^0 = u_-^3 \cosh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) \quad (40)$$

$$U^1 = \gamma v \cos\left(\frac{qB}{m}\tau\right) \quad (41)$$

$$U^2 = \gamma v \sin\left(\frac{qB}{m}\tau\right) \quad (42)$$

$$U^3 = u_-^3 \sinh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right), \quad (43)$$

## 10.2. Mouvement quand les champs sont parallèles

Maintenant on utilise que  $\mathbf{U}^2 = c^2$  pour trouver que  $c^2 = (u_-^3)^2 - (\gamma v)^2$ . Donc

$$u_-^3 = c \sqrt{1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}} = c \gamma. \quad (44)$$

où l'on a utilisé que  $\gamma^{-2} = 1 - (v/c)^2$ .

c) Puisque  $dt/d\tau = U^0/c = \gamma \cosh(qE\tau/(mc))$  alors

$$t = \gamma \sinh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) \frac{mc}{qE} \quad (45)$$

qui permet d'exprimer  $\tau$  en fonction de  $t$ . Puisque  $dz/d\tau = U^3 = c\gamma \sinh(qE\tau/(mc))$  on trouve que

$$z = z_0 + \gamma \frac{mc^2}{qE} \cosh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) \quad (46)$$

Et pour les autres coordonnées avec  $u = \gamma v$

$$x = x^0 + \gamma \frac{vm}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}\tau\right) \quad (47)$$

$$y = y^0 - \gamma \frac{vm}{qB} \cos\left(\frac{qB}{m}\tau\right). \quad (48)$$

On trouve un mouvement hélicoïdal.

d) Quand  $E = 0$ , alors  $t = \gamma \tau$  (qu'on peut déduire de l'équation (45)), donc on trouve un mouvement circulaire avec un pulsation cyclotron

$$\omega = \frac{qB}{\gamma m}. \quad (49)$$

e) Pour  $B = 0$  on a juste un mouvement selon  $z$ . Si on suppose qu'à  $t = 0$  on a  $z = 0$  alors

$$z = \gamma \frac{mc}{qE} \left( \cosh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) - 1 \right). \quad (50)$$

Puisque  $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$  alors

$$z = \gamma \frac{mc^2}{qE} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{\gamma mc}\right)^2} - 1 \right). \quad (51)$$

Dans la limite non relativiste  $c \gg 1$  et  $\gamma \simeq 1$  donc

$$z \simeq \frac{mc^2}{qE} \frac{1}{2} \left( \frac{qEt}{mc} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{qEt^2}{m}. \quad (52)$$

*10. Corrigé PC 6 : Relativité et électromagnétisme*



# 11. Corrigé PC 7 : Mécanique Hamiltonienne

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 6 janvier 2015

## 11.1. L'oscillateur harmonique

On considère un oscillateur harmonique à une dimension de potentiel

$$V(q) = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad (1)$$

a) La lagrangien est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad (2)$$

Les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \quad (3)$$

donnent

$$m \ddot{q} = -m \omega^2 q \quad (4)$$

b) L'Hamiltonien est donné par

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad (5)$$

Les équations d'Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -m \omega^2 q \end{aligned} \quad (6)$$

impliquent

$$\ddot{q} = -\omega^2 q \quad (7)$$

## 11. Corrigé PC 7 : Mécanique Hamiltonienne

c) Le moment conjugué  $p$  s'écrit

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = e^{\alpha t} \dot{q} \quad (8)$$

donc l'Hamiltonien s'écrit

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} p^2 e^{-\alpha t} + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 e^{\alpha t} \quad (9)$$

Les équations d'Hamilton donnent

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p e^{-\alpha t} \\ \dot{p} &= -\omega^2 q e^{\alpha t} \end{aligned} \quad (10)$$

ce qui implique

$$\ddot{q} + \alpha \dot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (11)$$

## 11.2. Mouvement dans un repère tournant

On part de la définition du moment conjugué

$$\vec{p} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m\vec{\Omega} \times \vec{v} \quad (12)$$

donc  $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} - \vec{\Omega} \times \vec{r}$  et le Lagrangien se réécrit  $\mathcal{L} = \vec{p}^2 / (2m)$ . Ainsi l'hamiltonien est donné par

$$\mathcal{H} := \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} \quad (13)$$

$$= \vec{p} \cdot \left( \frac{\vec{p}}{m} - \vec{\Omega} \times \vec{r} \right) - \mathcal{L} \quad (14)$$

$$= \frac{\vec{p}^2}{2m} - \vec{p} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}). \quad (15)$$

En utilisant la propriété du produit vectoriel  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$  que l'on démontre aisément en exprimant cette quantité

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k \quad (16)$$

en utilisant le pseudo-tenseur totalement antisymétrique  $\varepsilon_{ijk}$  introduit en PC5. Ainsi l'hamiltonien du système est donné par

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \underbrace{\vec{\Omega} \cdot \vec{r} \times \vec{p}}_{=\vec{l}}. \quad (17)$$

### 11.3. Le cerceau à vitesse angulaire constante

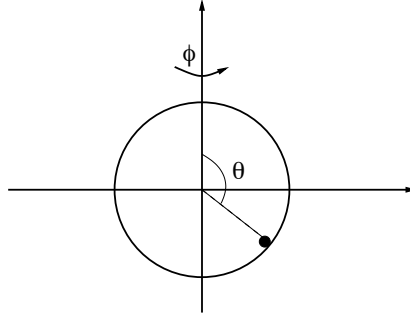


FIGURE 1. – Perle sur le cerceau en rotation

a) La perle sur le cerceau a pour coordonnées

$$x = R \cos \phi \sin \theta \quad (18)$$

$$y = R \sin \phi \sin \theta \quad (19)$$

$$z = R \cos \theta. \quad (20)$$

Si on désigne la vitesse de la perle par  $\vec{v}$  alors

$$\vec{v}^2 = R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta), \quad (21)$$

où l'on a utilisé que  $\dot{\phi} = \omega$  est la vitesse de rotation du cerceau. La perle est soumise au potentiel gravitationnel donc

$$V = mg \cos \theta, \quad (22)$$

et le lagrangien est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) - mgR \cos \theta. \quad (23)$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour la variable  $\theta$  donne

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt} (mR^2 \dot{\theta}) = \frac{mR^2}{2} \omega^2 \sin(2\theta) + mgR \sin \theta \quad (25)$$

donc

$$\ddot{\theta} = \frac{\omega^2}{2} \sin(2\theta) + \frac{g}{R} \sin \theta. \quad (26)$$

## 11. Corrigé PC 7 : Mécanique Hamiltonienne

b) Puisque

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta} \quad (27)$$

L'hamiltonien est donnée par

$$\mathcal{H} = p_\theta \dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} - \frac{mR^2 \omega^2}{2} \sin^2 \theta + mgR \cos \theta. \quad (28)$$

Les équations d'Hamilton-Jacobi donnent que

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \quad (29)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = \frac{mR^2 \omega}{2} \sin(2\theta) + mgR \sin \theta. \quad (30)$$

en combinant ces deux équations on retrouve l'équation du mouvement donnée dans (26).

c) La perle est soumise au potentiel effectif résultant de la force centrifuge et de la force de réaction du cerceau sur la perle

$$V_{eff}(\theta) = -\frac{mR^2 \omega^2}{2} \sin^2 \theta + mgR \cos \theta \quad (31)$$

$$= -mR^2 \left( \frac{\omega^2}{2} \sin^2 \theta - \omega_0^2 \cos \theta \right). \quad (32)$$

On constate que  $V_{eff}(\pi - \theta) = V_{eff}(\pi + \theta)$  qui implique une symétrie par rapport  $\theta = \pi$ . On calcule la dérivée du potentiel

$$\frac{dV_{eff}(\theta)}{d\theta} = -mR^2 \sin \theta (\omega^2 \cos \theta + \omega_0^2) \quad (33)$$

On constate que cette dérivée s'annule pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  pour toutes les valeurs de la vitesse de rotation  $\omega$ .

Autour de  $\theta = 0$  le potentiel prends la forme

$$V_{eff}(\theta) = mR^2 \omega_0 - \frac{mR^2}{2} (\omega^2 + \omega_0^2) \theta^2 + O(\theta^3). \quad (34)$$

Le signe moins indique que la position d'équilibre  $\theta = 0$  est toujours instable quelque soit la vitesse de rotation du cerceau.

Autour de  $\theta = \pi$  on trouve

$$V_{eff}(\theta) = mR^2 \omega_0 - \frac{mR^2}{2} (\omega^2 - \omega_0^2) (\theta - \pi)^2 + O((\theta - \pi)^3). \quad (35)$$

Ainsi la position  $\theta = \pi$  est stable pour les rotations lentes  $|\omega| < |\omega_0|$  et instable pour les rotations rapides  $|\omega| > |\omega_0|$ .

### 11.3. Le cerceau à vitesse angulaire constante

Si la vitesse de rotation  $|\omega| > |\omega_0|$  on trouve un autre point d'équilibre

$$\cos \theta_* = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \text{pour } \omega > \omega_0. \quad (36)$$

- d) On en déduit que pour les rotations lentes  $|\omega| < |\omega_0|$  la perle oscillera autour de la position d'équilibre  $\theta = \pi$  avec une pulsation  $R\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$ .
- e) Pour les rotations rapides  $|\omega| > |\omega_0|$  la position  $\theta = \pi$  devient instable et la perle s'écarte de cette position. La solution  $\theta_*$  devient une nouvelle position d'équilibre stable puisque

$$V(\theta_* + \eta) = V(\theta_*) + \left. \frac{d^2V(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_*} \eta^2 + O(\eta^3) \quad (37)$$

où nous avons utilisé que  $\left. \frac{dV(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_*} = 0$ . La dérivée seconde est donnée par

$$\frac{d^2V(\theta)}{d\theta^2} = -mR^2 (\omega_0^2 \cos \theta + \omega^2 \cos(2\theta)) \quad (38)$$

$$= -mR^2 (\omega_0^2 \cos \theta + \omega^2 (2 \cos^2 \theta - 1)), \quad (39)$$

où l'on a utilisé que  $\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$ . Ainsi pour la position d'équilibre  $\theta_*$  on a que

$$\left. \frac{d^2V(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_*} = mR^2 \omega^2 \left( 1 - \frac{\omega_0^4}{\omega^4} \right). \quad (40)$$

est positive ce qui correspond à la nouvelle position d'équilibre stable.

*11. Corrigé PC 7 : Mécanique Hamiltonienne*

## 12. Corrigé PC8 : Relativité et gravitation

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

PC du 13 janvier 2015

### 12.1. Géodésiques en relativité générale

$$\mathcal{S} = \int_{s_A}^{s_B} g_{\mu\nu}(x^\sigma) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu ds, \quad (1)$$

où  $\dot{x}^\mu$  est par définition  $dx^\mu/ds$  et où  $s$  est un paramètre le long de la courbe joignant  $A$  à  $B$ .

- a) Les équation d'Euler-Lagrange pour la densité de lagrangien  $\mathcal{L} = g_{\mu\nu}(x^\sigma) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$  pour les coordonnées  $x^\mu$  s'écrivent

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}, \quad (2)$$

soit

$$\frac{d}{ds} (2g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu) = \partial_\mu g_{\rho\sigma}(x) \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma. \quad (3)$$

Ces équations peuvent se réécrire

$$\ddot{x}^\mu + g^{\mu\nu} \left( \partial_\rho g_{\sigma\nu}(x) - \frac{1}{2} \partial_\nu g_{\rho\sigma}(x) \right) \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma = 0. \quad (4)$$

- b) En utilisant la définition du symbole de Christoffel

$$\Gamma_{\lambda\rho}^\mu := \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\lambda g_{\sigma\rho} + \partial_\rho g_{\sigma\lambda} - \partial_\sigma g_{\lambda\rho}), \quad (5)$$

et la symétrie du tenseur métrique  $g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)$  on trouve que l'équation du mouvement d'une particule libre dans un espace courbe est donnée par

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu \dot{x}^\rho \dot{x}^\lambda = 0. \quad (6)$$

## 12. Corrigé PC8 : Relativité et gravitation

c) En détaillant les composantes l'équation du mouvement s'écrit

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 + \Gamma_{0i}^\mu \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right) \frac{dx^i}{d\tau} + \Gamma_{ij}^\mu \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = 0. \quad (7)$$

Pour un mouvement lent (non relativiste) de la particule les termes en vitesse  $dx^i/d\tau$  sont négligeables devant les dérivées  $dt/d\tau$  et l'équation s'approxime en

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 \simeq 0. \quad (8)$$

Pour un champs stationnaire alors  $\partial_0 g_{\mu\nu}(x) = 0$  donc  $\Gamma_{00}^0 = 0$

$$\Gamma_{00}^i \simeq -\frac{1}{2} g^{i\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}. \quad (9)$$

Dans la limite des champs faibles  $g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , cette équation s'approxime en

$$\Gamma_{00}^i \simeq -\frac{1}{2} \eta^{i\nu} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2} \nabla^i h_{00}. \quad (10)$$

Les équations du mouvement donnent dans ces approximations

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 \nabla^i h_{00}. \quad (12)$$

De la première équation on déduit que  $x^0 = ct = \alpha\tau + \beta$  donc l'équation du mouvement pour les coordonnées spatiales  $x^i$  avec  $i = 1, 2, 3$  s'écrit

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \left( \frac{c^2}{2} h_{00} \right). \quad (13)$$

On reconnait l'expression du mouvement d'une particule soumise à la force gravitationnelle  $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$  dérivant du potentiel

$$U(\vec{x}) = \frac{c^2}{2} h_{00}(\vec{x}) + \text{Cste}. \quad (14)$$

On rappelle que pour une particule de mass  $m$  soumise au un potentiel gravitationnel, l'équation du mouvement est  $m\ddot{\vec{x}} = -m\vec{\nabla} U(\vec{x})$ .

d) On considère la métrique de Schwarzschild donnée par

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2G_N M}{rc^2} \right) c^2 dt^2 - \left( 1 - \frac{2G_N M}{rc^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (15)$$



où  $G_N$  est la constant de Newton.

e) L'approximation à grandes distances de cette métrique donne

$$h_{00} = -\frac{2G_N M}{c^2 r}. \quad (16)$$

donc le potentiel gravitationnel est

$$U(\vec{x}) = -\frac{G_N M}{r} \quad (17)$$

où l'on a fixé la contante d'intégration comme nulle. Pour un corps sphérique de masse totale  $M$  le potentiel Newtonien à la distance  $r$  de son centre est bien donné par l'expression trouvée ci-dessus.

## 12.2. Déviation des rayons lumineux

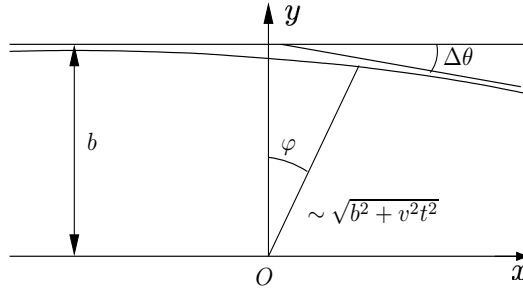


FIGURE 1. – Déviation de la lumière au voisinage du soleil

On considère une petite masse  $m \neq 0$  arrivant de l'infini et rasant le soleil de masse  $M_\odot$ . La trajectoire de la particule s'incurve d'un angle  $\Delta\theta$  faible (voir la figure). On supposera que  $y \sim b$  est constant.

a) Par définition

$$\delta\theta = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{v_y(x + \epsilon, y) - v_y(x, y)}{\epsilon} \delta t \simeq \partial_x v_y \delta t, \quad (18)$$

donc

$$\Delta\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x v_y dt. \quad (19)$$

b) Pour une particule de masse  $m$  soumise au champs de gravitation donc

$$\frac{dp_y}{dt} = -\frac{G_N M m}{r^2} \cos \varphi, \quad (20)$$

## 12. Corrigé PC8 : Relativité et gravitation

avec  $\cos \varphi = b/r$  donc

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{G_N M b}{r^3}. \quad (21)$$

Comme  $r^2 = b^2 + (vt)^2$  on en déduit que

$$\frac{dv_y}{dx} = \frac{dv_y}{dt} \frac{1}{v_x} \simeq -\frac{G_N M b}{v r^3}, \quad (22)$$

où l'on a utilisé l'approximation  $v \simeq v_x$  car la déviation selon ( $\mathcal{O}y$ ) est faible. Donc

$$\Delta\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -\frac{G_N M}{v(b^2 + (vt)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dt = -\frac{G_N M}{bv^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (23)$$

en utilisant que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = 2$  on trouve dans le cadre de la mécanique Newtonienne une déviation de

$$\Delta\theta^{\text{Newton}} = -\frac{2G_N M}{bv^2}. \quad (24)$$

- c) Comme cette formule ne dépend pas de la masse on peut l'appliquer aux rayons lumineux de vitesse  $v = c$  rasant le soleil  $b = R_\odot$ . On trouve alors

$$\Delta\theta^{\text{Newton}} = -4.25 \cdot 10^{-6} \text{ radian} = .875 \text{ secondes}. \quad (25)$$

On rappelle qu'un degré à pour valeur numérique  $\pi/180$  radians.

- d) L'équation du mouvement déduite dans l'exercice précédant donne

$$\frac{du^y}{d\tau} + \Gamma_{00}^y (u^0)^2 + \Gamma_{xx}^y (u^x)^2 + 2\Gamma_{x0}^y u^0 u^x + \Gamma_{yy}^y (u^y)^2 = 0. \quad (26)$$

Où les composantes du quadrivecteur vitesse sont dénotées  $\mathbf{U} = (u^\mu)$ . Comme la vitesse selon  $y$  est faible  $u^y$  est négligeable donc

$$\frac{du^y}{d\tau} \simeq \Gamma_{00}^y (u^0)^2 - \Gamma_{xx}^y (u^x)^2 - 2\Gamma_{x0}^y u^0 u^x. \quad (27)$$

Comme  $u^y = \gamma v^y$  avec  $\gamma$  approximativement constant on en déduit que

$$\frac{du^y}{d\tau} = \gamma \frac{dv^y}{d\tau} = \gamma u^x \frac{dv^y}{dx}, \quad (28)$$

ce qui dans l'équation du mouvement donne

$$\frac{1}{c} \frac{dv^y}{dx} \simeq -\Gamma_{00}^y \frac{(u^0)^2}{c\gamma u^x} - \Gamma_{xx}^y \frac{u^x}{c\gamma} - 2\Gamma_{x0}^y \frac{u^0}{c\gamma}. \quad (29)$$

Puisque  $u^0 = \gamma c$  et  $u^x = \gamma v$  on a

$$\frac{1}{c} \frac{dv^y}{dx} \simeq -\Gamma_{00}^y \left( \frac{c}{v} + \frac{v}{c} \right) - 2\Gamma_{x0}^y. \quad (30)$$

Maintenant on utilise que la métrique de Schwarzschild  $\Gamma_{00}^y \simeq \Gamma_{xx}^y$  pour trouver que

$$\frac{1}{c} \frac{dv^y}{dx} = -\Gamma_{00}^y \left( \frac{c}{v} + \frac{v}{c} \right) - 2\Gamma_{x0}^y. \quad (31)$$

- e) Pour la métrique de Schwarzschild de l'exercice précédant on a  $\Gamma_{00}^y \simeq G_N M b / (r^3 c^2)$  et  $\Gamma_{x0}^y \simeq 0$  ce qui donne que pour la variation de la vitesse

$$\frac{1}{c} \frac{dv^y}{dx} \simeq -\frac{G_N M b}{r^3 c^2} \left( \frac{c}{v} + \frac{v}{c} \right). \quad (32)$$

En appliquant cette équation au cas de la lumière avec  $v = c$  et avec  $r^2 = b^2 + (ct)^2$  on en déduit que

$$\frac{dv^y}{dx} \simeq -\frac{2G_N M b}{(b^2 + (ct)^2)^{\frac{3}{2}} c}, \quad (33)$$

ce qui donne comme angle de déviation pour la lumière

$$\Delta\theta^{\text{relativit}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -\frac{2G_N M b}{(b^2 + (ct)^2)^{\frac{3}{2}} c} \right) dt = -\frac{4G_N M}{bc^2} \quad (34)$$

Soit pour la déviation des rayons lumineux par le Soleil

$$\Delta\theta^{\text{relativit}} = 8.5 \cdot 10^{-6} \text{ radians} = 1.75 \text{ secondes}. \quad (35)$$

- f) On constate que la différence entre le résultat calculé en physique Newtonienne et en relativité est un facteur. Ce facteur deux vient de l'effet de courbure de l'espace-temps qui introduit un terme supplémentaire en  $\Gamma_{xx}^y v/c$  dans l'équation du mouvement. Le calcul Newtonien revient à ne considérer que l'effet du potentiel gravitationnel sur le temps et travailler avec la métrique

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2G_N M}{rc^2} \right) c^2 dt^2 - d\vec{x}^2, \quad (36)$$

alors que le calcul correct en relativité général tient compte aussi de la courbure de la partie spatiale comme donné par la métrique de Schwarzschild (15).

*12. Corrigé PC8 : Relativité et gravitation*

Quatrième partie .

Corrigés des devoirs à la maison



# 13. Correction du premier devoir à la maison

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

Devoir à la maison

**Avis au lecteur :**

Dans ce texte les questions sont *italiques*, les solutions sont en caractères droits.

## 13.1. Équation d'onde

On considère l'espace à quatre dimensions de coordonnées  $(ct, x, y, z)$ . Soit  $(ct', x', y', z')$  un autre système de coordonnées reliée au premier système par la transformation suivante

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (1)$$

On considère l'opérateur d'Alembertien défini par

$$\square := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2)$$

a) Déterminer la loi de transformation du d'Alembertien sous la transformation (1).

La d'Alembertien est donnée par

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \quad (3)$$

si on dénote par  $\Lambda$  la matrice dans la transformation (1) on obtient

$$\square' = \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\nu} \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu'} \partial_{\nu'}. \quad (4)$$

On vérifie que pour des valeurs générales de  $a$  et  $b$  la transformation (1) ne préserve pas la métrique de Lorentz

$$\Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\nu} \eta^{\mu\nu} \neq \eta^{\mu'\nu'} \quad (5)$$

### 13. Correction du premier devoir à la maison

ce qui est visible en calculant le déterminant  $\det \Lambda = a^2 - b^2$  alors que pour une transformation de Lorentz le déterminant vaut un.

Par un calcul direct en coordonnées la transformation (1) implique

$$\frac{\partial}{\partial(ct')} = a \frac{\partial}{\partial(ct)} + b \frac{\partial}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = b \frac{\partial}{\partial(ct)} + a \frac{\partial}{\partial x}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (9)$$

donc

$$\frac{\partial^2}{\partial(ct')^2} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2}{\partial(ct)\partial x}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} = b^2 \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2}{\partial(ct)\partial x}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (13)$$

on trouve donc

$$\square' = (a^2 - b^2) \left( \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (14)$$

b) *Considérer le cas de deux observateurs avec une vitesse relative  $v$  selon l'axe  $Ox$  faible devant la vitesse de la lumière. Montrer qu'au premier ordre en  $v/c$  la transformation de référentielle entre les observateurs correspond à  $(a, b) = (1, v/c)$ . Calculer la transformation du d'Alembertien sous cette transformation. Que concluez-vous ?*

La limite non relativiste des transformations de Lorentz à l'ordre quadratique en la vitesse  $v/c$

$$ct = ct' + \frac{v}{c} x + o(v/c)^2 \quad (15)$$

$$x = x' + \frac{v}{c} ct + o(v/c)^2 \quad (16)$$



correspond à  $a = 1$  et  $b = v/c$ . Dans l'équation (14) on trouve

$$\square' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + O(v/c)^2 \quad (17)$$

indiquant que l'opérateur d'Alembertien n'est pas invariant sous les transformations Galiléennes.

Si on conserve  $v \ll c$  mais non nulle, le d'Alembertien n'est invariant qu'au premier ordre en  $v/c$  :  $\square' \simeq \square + O(v^2/c^2)$ .

Si on prend la limite  $c \rightarrow \infty$  et que l'on suppose que les variations temporelle et spatiales sont faibles alors  $\square \simeq -\Delta + O(1/c^2)$  et on retrouve bien sûr que le Laplacien est invariant.

c) On considère maintenant que nos deux observateurs sont relativistes, toujours en mouvement relatif à vitesse  $v$  le long de l'axe  $Ox$ . Donner la loi de transformation du d'Alembertien. Que concluez-vous ?

Pour les transformations relativistes on a  $a = \gamma$  et  $b = \gamma \beta$  avec  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$  et  $\beta = v/c$ , donc  $a^2 - b^2 = 1$  et  $\square = \square'$ .

Le d'Alembertien est donc invariant sous les transformations de Lorentz.

d) On considère l'équation de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(t, x, y, z) + U(x, y, z) \Psi(t, x, y, z) = i\hbar \frac{\partial \Psi(t, x, y, z)}{\partial t} \quad (18)$$

avec la laplacien  $\Delta = (\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2 + (\partial/\partial z)^2$ . Étudier l'invariance cette équation sous une transformation galiléenne. Montrer qu'il existe une fonction  $f(t', x')$  telle que  $\Psi(t, x) = f(t', x') \tilde{\Psi}(t', x')$  avec  $\tilde{\Psi}(t', x')$  une fonction d'onde satisfaisant l'équation de Schrödinger en les variables  $(t', x')$ .

Sous une transformation galiléenne

$$t' = t \quad (19)$$

$$x' = x + vt \quad (20)$$

l'équation de Schrödinger se transforme

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial(f(t', x') \tilde{\Psi}(t', x'))}{\partial t'} + v \frac{\partial(f(t', x') \tilde{\Psi}(t', x'))}{\partial x'} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial(f(t', x') \tilde{\Psi}(t', x'))}{\partial x'} \quad (22)$$

### 13. Correction du premier devoir à la maison

On en déduit que

$$f(t', x') \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta' \tilde{\Psi}(t', x') + U(t', x') \tilde{\Psi}(t', x') - i\hbar \frac{\partial \tilde{\Psi}(t', x')}{\partial t'} \right) = \\ - \tilde{\Psi}(t', x') \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f(t', x')}{\partial x'^2} - i\hbar \frac{\partial f(t', x')}{\partial t'} \right) \\ + \left( \frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial f(t', x')}{\partial x'} - i\hbar v f(t', x') \right) \frac{\partial \tilde{\Psi}(t', x')}{\partial x'} \quad (23)$$

Si on veut que  $\tilde{\Psi}$  satisfasse l'équation de Schrödinger il faut que

$$\tilde{\Psi}(t', x') \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f(t', x')}{\partial x'^2} - i\hbar \frac{\partial f(t', x')}{\partial t'} \right) \\ = \left( \frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial f(t', x')}{\partial x'} - i\hbar v f(t', x') \right) \frac{\partial \tilde{\Psi}(t', x')}{\partial x'}. \quad (24)$$

Puisque  $\tilde{\Psi}$  et  $\partial_{x'} \tilde{\Psi}$  sont arbitraire ceci implique

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f(t', x')}{\partial x'^2} - i\hbar \frac{\partial f(t', x')}{\partial t'} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial f(t', x')}{\partial x'} - i\hbar v f(t', x') = 0. \quad (26)$$

Ces équations impliquent

$$f(t, x) = f_0 e^{i \frac{mvx}{\hbar} - i \frac{mv^2}{2\hbar} t} \quad (27)$$

où  $f_0$  est une phase constant d'intégration. Afin que  $|\Psi(t, x)|^2 = |\tilde{\Psi}(t', x')|^2$  cette constante doit être une phase.

On reconnaît dans la phase le produit de la quantité de mouvement et de la position  $\vec{p} \cdot \vec{x} / \hbar$ . Le second terme de la phase est l'énergie cinétique non-relativiste  $T = \frac{1}{2}mv^2$  fois le temps  $t$ .

- e) Que ce passe-t-il pour l'équation d'onde  $\square \phi(t, x, y, z) = 0$  dans le cas galiléen et relativiste. Peut-on trouver une fonction  $f(t', x')$  telle que  $\phi(t, x) = f(t', x') \phi'(t', x')$  et que l'équation d'onde soit invariante sous les transformations galiléennes. Qu'en déduire sur la nature de l'équation d'onde ?

Dans le cas Galiléen on a avec la transformation (19)

$$\phi(t', x', y', z') = \phi(t, x - vt, y, z) = \phi(t, x, y, z) \quad (28)$$

donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial ct} = \frac{\partial \phi}{\partial ct'} - \frac{v}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x'} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x'} \quad (30)$$

donc sous une transformation Galiléenne l'équation devient

$$\square \phi(t, \vec{x}) = \left( \frac{\partial^2}{\partial ct'^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial ct' \partial x'} + (c^2 - v^2) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \phi(t', \vec{x}') \quad (31)$$

Dans la cas relativiste

$$\frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial ct} = \gamma \frac{\partial \phi(t', \vec{x}')}{\partial ct'} - \gamma \beta \frac{\partial \phi(t', \vec{x}')}{\partial x'} \quad (32)$$

$$\frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial x} = \gamma \frac{\partial \phi(t', \vec{x}')}{\partial x'} - \beta \gamma \frac{\partial \phi(t', \vec{x}')}{\partial ct'} \quad (33)$$

donc

$$\square \phi(t, \vec{x}) = (\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2) \square' \phi(t', \vec{x}') = \square' \phi(t', \vec{x}') \quad (34)$$

Une solution de cette équation est l'onde plane

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (35)$$

avec la condition, conséquence de l'équation  $\square \phi(t, \vec{x}) = 0$

$$\frac{\omega^2}{c^2} - (\vec{k})^2 = 0 \quad (36)$$

qui est la relation de dispersion pour une onde électromagnétique relié sa fréquence  $\mathcal{E} = \hbar \omega = h \nu$  à sa longueur d'onde  $\|\vec{k}\| = \frac{2\pi}{\lambda}$ . On retrouve la relation de dispersion  $\nu \lambda = c$ .

On peut écrire la solution (35) avec les quadri-vecteur énergie-impulsion  $\mathbf{P} = \hbar \mathbf{K} = (\omega/c, \vec{k})$  et position  $\mathbf{X} = (x^0 = ct, \vec{x})$  comme

$$\phi(t, \vec{x}) = \phi_0 e^{i\hbar \mathbf{K} \cdot \mathbf{X}} \quad (37)$$

et la relation de dispersion (36) est la condition de masse nulle pour le quadri-vecteur  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = 0. \quad (38)$$

Si on compare avec la fonction  $f(t, \vec{x})$  trouvé dans (27) on constate que celle-ci

### 13. Correction du premier devoir à la maison

prend la forme  $f(t, \vec{x}) = f_0 e^{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}}$  où cette fois

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{m(\vec{v})^2}{2c\hbar} \\ \frac{m\vec{v}}{\hbar} \end{pmatrix} \quad (39)$$

qui fait intervenir énergie cinétique non-relativiste  $\frac{m(\vec{v})^2}{2}$  et la quantique de mouvement non-relativiste  $m\vec{v}$ . On peut voir cette fonction comme celle d'une onde plane non-relativiste, qui n'est bien sur pas invariante sous les transformations de Lorentz.

### 13.2. Paradoxe d'Ehrenfest

*En 1909 Paul Ehrenfest a énoncé un paradoxe semblant montrer un incohérence logique à la relativité restreinte.<sup>1</sup>*

*On considère un disque de rayon  $\rho$  en rotation avec une vitesse angulaire constante  $\omega$ . On dénote par  $\mathcal{R}$  le repère inertiel du laboratoire et  $\mathcal{R}'$  le repère en rotation attaché au disque.*

a) *Quelle est la valeur du rayon du disque dans les repères  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ?*

Le mouvement du repère  $\mathcal{R}'$  est perpendiculaire au rayon, donc il n'y a pas de contraction de Lorentz pour la rayon pour les deux observateur la rayon du disque est le même  $\rho_{\mathcal{R}} = \rho_{\mathcal{R}'} = \rho$ .

b) *Quelle est la circonférence  $L$  dans le repère du laboratoire  $\mathcal{R}$  et  $L'$  dans le repère du disque en rotation ?*

Dans le repère attaché au disque en rotation  $L_{\mathcal{R}'} = 2\pi\rho_{\mathcal{R}'} = 2\pi\rho$ , pour un observateur dans le référentiel fixe du laboratoire le périmètre est

$$L_{\mathcal{R}} = \int_{\text{bord}} d\ell_{\mathcal{R}} \quad (40)$$

l'élément de longueur infinitésimal contracté selon la direction du mouvement instantanée

$$d\ell_{\mathcal{R}} = \frac{d\ell_{\mathcal{R}'}}{\gamma} \quad (41)$$

avec

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{\omega\rho}{c}. \quad (42)$$

car la vitesse d'un point sur la bord est  $v = \omega\rho$ . On trouve donc

$$L_{\mathcal{R}} = \frac{L_{\mathcal{R}'}}{\gamma}. \quad (43)$$

---

1. P. Ehrenfest, (1909). *Gleichförmige Rotation starrer Körper und Relativitätstheorie*. Physikalische Zeitschrift 10 : 918. Pour une traduction en anglais [http://en.wikisource.org/wiki/Uniform\\_Rotation\\_of\\_Rigid\\_Bodies\\_and\\_the\\_Theory\\_of\\_Relativity](http://en.wikisource.org/wiki/Uniform_Rotation_of_Rigid_Bodies_and_the_Theory_of_Relativity)

Puisque  $L_{\mathcal{R}'} = 2\pi\rho$  on trouve que

$$L_{\mathcal{R}'} = 2\pi \frac{\rho}{\gamma}. \quad (44)$$

c) Comparer les rapports  $L/\rho$  et  $L'/\rho'$  ? Qu'en concluez-vous ?

On a

$$\frac{L_{\mathcal{R}}}{\rho_{\mathcal{R}}} = 2\pi \times \sqrt{1 - \frac{\omega^2 \rho^2}{c^2}} < 2\pi = \frac{L_{\mathcal{R}'}}{\rho_{\mathcal{R}'}}. \quad (45)$$

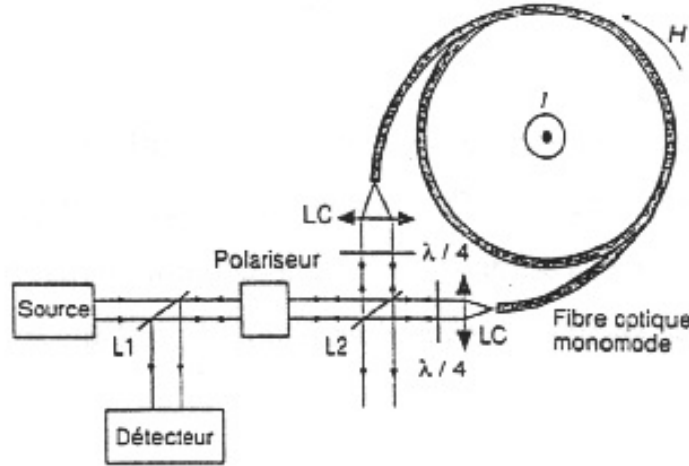
La résolution du paradoxe est que l'observateur sur le bord du disque n'est pas un observateur inertiel car il est soumis à la force centrifuge. Les sections de simultanéité  $t = \text{constante}$  ne sont pas de géométrie euclidienne de métrique  $ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 = -(dr^2 + r^2 d\theta^2) - dy^2 - dz^2$  mais des courbes de métrique (voir L. Landau et E. Lifschitz, *Théorie des champs*, Tome 2, §89 (MIR))

$$ds^2|_{t=\text{cste}} = -\left(dr^2 + \frac{r^2}{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} d\theta^2\right) - dz^2. \quad (46)$$

Pour ceux que ce paradoxe intéresse voici un article récent où une résolution physique est discutée

R. Alexander "Ehrenfest's paradox for tokamak plasma", Journal of Modern Physics, Vol.3 No.10, 2012, PP.1639-1646 <http://arxiv.org/abs/1202.2953>.

### 13.3. Effet Sagnac



L'effet Sagnac est un autre effet paradoxal de la relativité restreinte découvert par Georges Sagnac en 1913. Cet effet permet de détecter en optique un mouvement de rotation par rapport à l'espace inertiel.

On considère à nouveau un disque de rayon  $\rho$  en rotation avec une vitesse angulaire constante  $\omega$ . On dénote par  $\mathcal{R}$  le repère inertiel du laboratoire et  $\mathcal{R}'$  le repère en

### 13. Correction du premier devoir à la maison

*rotation attaché au disque.*

Sur le bord du disque est placé un émetteur/récepteur  $E$ . Ce dispositif émet un signal  $S_1$  qui se propage avec une vitesse  $\omega_1$  dans le sens de rotation du disque, et un signal  $S_2$  qui se propage avec une vitesse  $\omega_2$  dans le sens opposé à la rotation du disque. Les deux signaux évoluent le long du bord extérieur du disque.

a) Déterminez les positions angulaires  $\theta_1$  et  $\theta_2$  de réception des signaux  $S_1$  et  $S_2$  par le détecteur.

On utilise le système de coordonnées  $x^\mu = (ct, r, \theta, z)$ . L'invariant relativiste  $(cd\tau)^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (cdt)^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - dz^2$ . Comme le problème est dans le plan  $z = \text{cste}$  cette coordonnée n'est plus écrite dans la suite.

La ligne d'univers du détecteur est

$$E = (ct, R, \omega t) = \left( \frac{c\theta}{\omega}, R, \theta \right) \quad (47)$$

Les signaux ont comme lignes d'univers

$$S_1 = \left( \frac{c\theta}{\omega_1}, R, \theta \right) \quad (48)$$

$$S_2 = \left( \frac{c\theta}{\omega_2}, R, \theta \right) \quad (49)$$

Le signal  $S_1$  est détecté par  $E$  lorsque

$$\frac{c\theta_1}{\omega} = \frac{c}{\omega_1} (\theta_1 + 2\pi) \iff \theta_1 = \frac{2\pi\omega}{\omega_1 - \omega}. \quad (50)$$

Le signal  $S_2$  est détecté par  $E$  lorsque

$$\frac{c\theta_2}{\omega} = \frac{c}{\omega_1} (\theta_2 - 2\pi) \iff \theta_2 = -\frac{2\pi\omega}{\omega_2 - \omega}. \quad (51)$$

Le signe  $-$  est dû au fait que le signal  $S_2$  tourne dans l'autre sens.

Les vitesses angulaires du détecteur, du signal  $S_1$  et du signal  $S_2$  sont dénotés  $B$ ,  $B_1$  et  $B_2$ , telles que

$$B = \frac{\omega R}{c} \quad (52)$$

$$B_1 = \frac{\omega_1 R}{c} \quad (53)$$

$$B_2 = \frac{\omega_2 R}{c}, \quad (54)$$

donc les angles dans (51) sont donnés par

$$\theta_1 = \frac{2\pi B}{B_1 - B} = \frac{2\pi\omega}{\omega_1 - \omega} \quad (55)$$

$$\theta_2 = -\frac{2\pi B}{B_2 - B} = -\frac{2\pi\omega}{\omega_2 - \omega}. \quad (56)$$

b) Calculer les temps propre  $\tau_1$  et  $\tau_2$  de propagation de chacun des signaux entre l'émission et la réception. Calculer la différence des  $\delta\tau = \tau_1 - \tau_2$ .

Le temps propre de  $E$  dans le repère en rotation avec le disque

$$\tau = \frac{1}{c} \int_0^\theta c d\tau = \frac{1}{c} \int_0^\theta \sqrt{c^2 dt^2 - R^2 d\vartheta^2} = \frac{\sqrt{1 - B^2}}{\omega} \int_0^\theta d\vartheta = \frac{\sqrt{1 - B^2}}{\omega} \theta \quad (57)$$

Posons

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\omega R)^2}{c^2}}} \quad (58)$$

le facteur relativiste du référentiel en rotation. Pour le signal  $S_1$

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\gamma} \frac{B}{B_1 - B} = \frac{2\pi}{\gamma} \frac{\omega}{\omega_1 - \omega} \quad (59)$$

pour le signal  $S_2$

$$\tau_2 = -\frac{2\pi}{\gamma} \frac{B}{B_2 - B} = -\frac{2\pi}{\gamma} \frac{\omega}{\omega_2 - \omega} \quad (60)$$

donc

$$\Delta\tau := \tau_1 - \tau_2 = \frac{2\pi B}{\omega\gamma} \frac{\omega_1 - \omega_2 - 2\omega}{(\omega_1 - \omega)(\omega_2 - \omega)} \quad (61)$$

c) Si l'émetteur/récepteur émet de la lumière de manière isotrope  $\omega' = \omega_1 = -\omega_2$ , donner l'expression de différence de temps  $\delta\tau$ .

Si  $E$  émet un signal isotrope avec une vitesse  $B'$  (dans le repère inertiel local à  $E$ ), la loi de composition des vitesses donne

$$B_1 = \frac{B'_1 + B}{1 + B'_1 B} \quad (62)$$

$$B_2 = \frac{B'_2 + B}{1 + B'_2 B} \quad (63)$$

donc

13. Correction du premier devoir à la maison

$$\Delta\tau = \frac{4\pi B^2\gamma}{\omega} + \frac{2\pi B\gamma}{\omega} \left( \frac{1}{B'_1} + \frac{1}{B'_2} \right) \quad (64)$$

avec  $B'_1 + B'_2 = 0$  on trouve l'effet Sagnac relativiste

$$\Delta\tau = \frac{4\pi R^2\omega}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (65)$$

d) Considérer la limite non relativiste. Qu'en concluez vous ?

Si  $R\omega \ll c$  alors le facteur relativiste  $\gamma = \left( 1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1$  et l'expression précédente devient

$$c^2\Delta\tau \simeq 4\pi^2 R^2\omega = 4\text{Aire}\omega \quad (66)$$

l'effet est proportionnel à l'aire du disque. Expérimentalement on constate cette dépendance quelque soit la forme du bord entourant la surface. On peut donc ainsi mesurer facilement la vitesse de rotation  $\omega$ .

*Des gyroscopes à laser exploitant l'effet Sagnac sont couramment utilisés pour mesurer avec précision la rotation d'un dispositif relativement à un repère inertiel.*

Pour une discussion de la physique de l'effet Sagnac vous pouvez consulter

- J. Anandan, "The Sagnac Effect In Relativistic And Nonrelativistic Physics," Phys. Rev. D **24** (1981) 338.
- G. Rizzi and M. L. Ruggiero, "The Relativistic Sagnac effect : Two derivations," <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0305084>.



# 14. Corrigé du second devoir à la maison

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

**Avis au lecteur :**

Dans ce texte les questions sont *italiques*, les solutions sont en caractères droits.

## 14.1. Équation de Maxwell et sources

Le rang de covariance d'un tenseur est augmenté d'une unité par l'action de l'opérateur  $\partial$  de « composantes »  $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\} \equiv (\frac{\partial_t}{c}, \vec{\nabla})$ . Le tenseur métrique ( $\eta_{\mu\nu}$  ou son inverse  $\eta^{\mu\nu}$ ) et le tenseur antisymétrique de Levi-Civita ( $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  ou  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  avec  $\varepsilon^{0123} = 1 = -\varepsilon_{0123}$ ) peuvent aussi être utilisés pour engendrer de nouveaux tenseurs ou scalaires (invariants) à partir de tenseurs préalablement définis.

Si l'on considère le tenseur de Faraday  $\mathbf{F}$  décrit le champ électromagnétique. Ses composantes  $F_{\mu\nu}$  forment la matrice suivante :

$$F_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & E^x/c & E^y/c & E^z/c \\ -E^x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E^y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E^z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

alors

$$F^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma}. \quad (2)$$

a) Montrer l'équivalence

$$F^\mu = 0 \iff \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (3)$$

$$F^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = \frac{1}{3} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}) \quad (4)$$

Comme

$$\frac{1}{6} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} F^\lambda = \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} \quad (5)$$

on en déduit (3).

Remarque nous aurions pu travailler sans expliciter les coordonnées en posant

14. Corrigé du second devoir à la maison

$$\mathbf{F}_1 := F^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (6)$$

$$\mathbf{dF} := (\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}) \mathbf{e}^\mu \wedge \mathbf{e}^\nu \wedge \mathbf{e}^\rho \quad (7)$$

il faut alors montrer que  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{dF}$ . Nous avons

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{3} (\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{e}_\mu \quad (8)$$

il suffit de réaliser que

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{e}_\mu = 3 \mathbf{e}^\mu \wedge \mathbf{e}^\nu \wedge \mathbf{e}^\rho. \quad (9)$$

On a vu en PC4 que cette équation implique les équations de Maxwell suivantes

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{absence de monopôles magnétiques} \quad (10)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{loi de Faraday} \quad (11)$$

b) Vérifiez les expressions des invariants relativistes du champs électromagnétique

$$\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -2 \left( \frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2 \right), \quad (12)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -\frac{8}{c} \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (13)$$

Sous une transformation de Lorentz  $\Lambda$

$$F'_{\mu\nu} = F_{\rho\sigma} \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma, \quad (14)$$

donc

$$I_1 = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta \Lambda_\rho{}^\gamma \Lambda_\sigma{}^\delta F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \quad (15)$$

$$I_2 = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta \Lambda_\rho{}^\gamma \Lambda_\sigma{}^\delta F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \quad (16)$$

Mais

$$\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\rho{}^\gamma = \eta^{\alpha\gamma} \quad (17)$$

car la transformation de Lorentz préserve la métrique (ou de manière équivalente le produit scalaire entre deux quadri-vecteurs) comme nous l'avons vu en PC3. Donc

$$I_1 = \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}. \quad (18)$$

Maintenant remarquons que

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta \Lambda_\rho{}^\gamma \Lambda_\sigma{}^\delta = (\det \Lambda) \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (19)$$

### 14.1. Équation de Maxwell et sources

Pour prouver cette identité, choisissez des valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  et utiliser la définition du déterminant d'une matrice comme une somme alternée sur les permutations  $\mathfrak{S}_4$  de (1234)

$$\det \Lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} |\sigma| \Lambda_{1\sigma(1)} \Lambda_{2\sigma(2)} \Lambda_{3\sigma(3)} \Lambda_{4\sigma(4)} \quad (20)$$

les valeurs de  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  correspondent à la signature de la permutation  $(1234) \rightarrow (\mu\nu\rho\sigma)$ . Comme les transformations de Lorentz ont  $\det \Lambda = 1$  puisque nous sommes dans la composante  $SO^{+\uparrow}(1, 3)$  du groupe des transformations (cf. PC3), et  $I_2$  est bien un invariant relativiste.

Montrons maintenant l'équation (16).

$$I_2 = 8 (\varepsilon^{0123} F_{01} F_{23} + \varepsilon^{0213} F_{02} F_{13} + \varepsilon^{0321} F_{03} F_{21}) \quad (21)$$

$$= 8 \left( \frac{E^x}{c} (B_x) - \frac{E^y}{c} (-B_y) - \frac{E^z}{c} (-B_z) \right) \quad (22)$$

$$= -8 \frac{E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z}{c} = -8 \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{c} \quad (23)$$

c) Montrez que l'équation

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad (24)$$

implique les équations de Maxwell avec sources

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{loi de Gauss} \quad (25)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{loi d'Ampère} \quad (26)$$

où  $\rho$  et  $\vec{j}$  sont les densités de charge et de courant (rappel :  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ ).

Tout d'abord spécifions  $\nu = 0$ . Nous avons la suite d'équivalences suivante

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 j^0 \quad (27)$$

$$\iff \partial_i F^{i0} = \mu_0 c \rho \quad (28)$$

$$\iff \partial_i \frac{E^i}{c} = \mu_0 c \rho \quad (29)$$

$$\iff \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (30)$$

14. Corrigé du second devoir à la maison

pour  $\nu = i$  avec  $i = 1, 2, 3$  on a la suite d'équivalence suivante

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \mu_0 j^i \quad (31)$$

$$\iff \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = \mu_0 j^i \quad (32)$$

$$\iff -\frac{\partial}{\partial(ct)} \frac{E^i}{c} + \epsilon^{ijk} \partial_j B_k = \mu_0 j^i \quad (33)$$

$$\iff -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E^i}{\partial t} + (\vec{\nabla} \times \vec{B})^i = \mu_0 j^i \quad (34)$$

d) Montrer que  $\mathbf{J} = \{j^\nu, \nu = 0, 1, 2, 3\} := (c\rho, \vec{j} = \rho \vec{v})$  sont les composantes d'un quadrivecteur  $\mathbf{J}$ , dit de densité de courant, si la charge électrique est invariante sous les transformation de Lorentz.

Comme  $\mathbf{J} = \frac{\rho}{\gamma}(c, \vec{v}) = \frac{\rho}{\gamma} \mathbf{U}$  puisque  $\mathbf{U}$  est invariant de Lorentz il faut montrer que  $\rho/\gamma$  est invariant de Lorentz. On dit que la charge  $Q$  est invariante donc la densité de charge  $\rho = dQ/dV$  est sensible à la contraction des longueurs. Sous une transformation de Lorentz  $dV \rightarrow dV/\gamma$ , et le facteur  $\gamma$  est justement présent pour compenser cet effet sur la densité de charge.

Alternativement, comme nous savons que  $j^\mu = \mu_0^{-1} \partial_\nu F^{\mu\nu}$  est comme la dérivée d'un quadri-tenseur est un quadri-tenseur, alors  $j^\mu$  sont les composantes d'un quadri-vecteur.

On peut aussi écrire ces équations sans expliciter les indices en introduisant

$$\mathbf{d} \star \mathbf{F} := \partial_\mu F^{\mu\nu} \mathbf{e}_\nu \quad (35)$$

Alors l'équation de Maxwell avec source s'écrit

$$\mathbf{d} \star \mathbf{F} = \mu_0 \star \mathbf{J} . \quad (36)$$

En utilisant le tenseur  $\epsilon$  on montre que

$$6 \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \epsilon_{\kappa\lambda\rho\sigma} \partial_\mu F^{\rho\sigma} = \partial_\mu F^{\mu\nu} . \quad (37)$$

Sinon pose

$$\star \mathbf{F} := \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \mathbf{e}^\rho \otimes \mathbf{e}^\sigma \quad (38)$$

$$\star \mathbf{J} := \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_\sigma \mathbf{e}^\rho \otimes \mathbf{e}^\sigma \otimes \mathbf{e}^\rho \quad (39)$$

Les équations de Maxwell sans sources et avec sources s'écrivent alors

$$\mathbf{dF} = 0 \quad (40)$$

$$\mathbf{d} \star \mathbf{F} = \mu_0 \star \mathbf{J} . \quad (41)$$

e) Montrer que les équations inhomogènes de Maxwell imposent l'équation de continuité

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (42)$$

La divergence de (26) donne

$$-\frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (43)$$

la dérivée temporelle de (25) donne

$$\partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \partial_t \varrho \quad (44)$$

en combinant ces deux équations on obtient la relation de continuité demandée.

f) Écrire cette équation en utilisant le quadri-vecteur  $\mathbf{J}$ . Obtenir cette équation directement à partir de (24).

Cette équation s'écrit simplement

$$\partial_{ct}(c\rho) + \partial_i j^i = \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (45)$$

En dérivant (24) on obtient

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 \partial_\nu J^\nu \quad (46)$$

mais comme  $F^{\mu\nu}$  est antisymétrique le membre de gauche est nul.

En utilisant les notations introduites dans (39) cette équation s'écrit simplement comme

$$(\mathbf{d} \star \mathbf{J}) = 0. \quad (47)$$

Nous avons vu en PC5 que les équations homogènes de Maxwell dans (3), ou de manière équivalente (10)-(11) sont satisfaites si  $F_{\mu\nu}$  résulte d'une forme de potentiel  $\mathbf{A} = (A^0/c, \vec{A})$  selon

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (48)$$

Nous avons vu que  $\mathbf{A}$  est défini à la dérivée d'une fonction arbitraire près

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' + \nabla \chi \quad (49)$$

Nous avons vu aussi que pour fixer cette liberté de jauge, on impose une contrainte. Une contrainte invariante de Lorentz est la jauge de Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (50)$$

g) Montrer que dans cette jauge les équations de Maxwell inhomogènes deviennent

$$\square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (51)$$

#### 14. Corrigé du second devoir à la maison

où  $\square := \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$  est l'opérateur d'Alembertien.

On applique (24)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \square A^\nu. \quad (52)$$

### 14.2. Le pendule double

On veut analyser la dynamique d'un pendule double placé dans le champ de gravitation terrestre. Ce pendule est constitué de deux masses reliées par des cables rigides de masses négligeables (voir fig 1.2).

a) Écrire le lagrangien du système. En déduire les équation d'Euler-Lagrange.

Le lagrangien est donné par la somme des lagrangiens des masses  $m_1$  et  $m_2$ , c'est-à-dire  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$  avec

$$\mathcal{L}_1 = \frac{m_1}{2} \vec{v}_1^2 - (m_1 g y_1) \quad (53)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{m_2}{2} \vec{v}_2^2 - (m_2 g y_2). \quad (54)$$

(L'axe verticale est orienté vers le haut, d'où le signe dans le potentiel gravitationnel). Comme le mouvement est dans le plan  $(x\mathcal{O}y)$  et la rigidité des cables se traduit par les relations  $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l_2^2$  et  $x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$  on utilise les coordonnées angulaires pour la masse  $m_1$

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad (55)$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \quad (56)$$

et pour la masse  $m_2$

$$x_2 = x_1 + l_2 \sin \theta_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (57)$$

$$y_2 = y_1 - l_2 \cos \theta_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \quad (58)$$

Le lagrangien ne dépend que des angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  donc les équation d'Euler-Lagrange sont

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} \quad (59)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2}. \quad (60)$$

On obtient alors le système suivant

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 \\ & + m_2l_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_2)^2 + (m_1 + m_2)gl_1 \sin(\theta_1) = 0, \end{aligned} \quad (61)$$

et

$$\begin{aligned} & m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 \\ & + m_2l_1l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) (\dot{\theta}_1)^2 + m_2gl_2 \sin(\theta_2) = 0. \end{aligned} \quad (62)$$

b) Sous l'hypothèse d'un angle initial  $\theta_0$  suffisamment petit, écrire les équation du mouvement dans l'approximation des petits déplacements. Pour de petits déplacements  $\cos(x) \simeq 1$  et  $\sin(x) \simeq x$  et en ne conservant que les termes du premier ordre en les angles et leur variations temporelles on trouve le système suivant

$$\begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2 \\ m_2l_1l_2 & m_2l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 & 0 \\ 0 & m_2gl_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (63)$$

c) Résoudre les équations du mouvement. On suppose les condition initiales suivantes  $\theta_1(0) = \theta_0$ ,  $\theta_2(0) = 0$  et  $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ .

Si on pose la masse réduite  $\mu_2 = m_2/(m_1 + m_2)$  le système prend la forme

$$\begin{pmatrix} l_1 & \mu_2 l_2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (64)$$

Les valeur propres de la matrice

$$M = g \left( \begin{pmatrix} l_1 & \mu_2 l_2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{g}{1 - \mu_2} \begin{pmatrix} l_1^{-1} & -\mu_2 l_1^{-1} \\ -l_2^{-1} & l_2^{-1} \end{pmatrix} \quad (65)$$

sont

$$\begin{aligned} \omega_+ &= g \frac{l_1 + l_2 + \sqrt{(l_2 - l_1)^2 + 4\mu_2 l_1 l_2}}{2l_1 l_2 (1 - \mu_2)} \\ \omega_- &= \frac{g}{\omega_+ l_1 l_2 (1 - \mu_2)} = \frac{2g}{l_1 + l_2 + \sqrt{(l_2 - l_1)^2 + 4\mu_2 l_1 l_2}}, \end{aligned} \quad (66)$$

les vecteur propres associées sont

$$v_{\pm} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2l_1} \left( l_2 - l_1 + \pm \sqrt{(l_2 - l_1)^2 + 4\mu_2 l_1 l_2} \right) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (67)$$

#### 14. Corrigé du second devoir à la maison

La matrice  $P = (v_+, v_-)$  est la matrice de passage telle que

$$M = P^{-1} \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{pmatrix} P \quad (68)$$

En posant

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} := P \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (69)$$

La solution générale s'écrit

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= c_1 \cos(\omega_+ t) + s_1 \sin(\omega_+ t) \\ \alpha_2(t) &= c_2 \cos(\omega_- t) + s_2 \sin(\omega_- t), \end{aligned} \quad (70)$$

soit

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \cos(\omega_+ t) + s_1 \sin(\omega_+ t) \\ c_2 \cos(\omega_- t) + s_2 \sin(\omega_- t) \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Les conditions initiales donnent

$$c_1 = -\frac{l_1 \theta_0}{\sqrt{(l_2 - l_1)^2 + 4\mu_2 l_1 l_2}} \quad (72)$$

et  $c_1 + c_2 = 0$  ainsi que  $s_1 = s_2 = 0$ .

### 14.3. L'atome d'hydrogéoïde

*On considère un atome Hydrogéoïde, obtenu en arrachant à un atome tous ses électrons sauf un. Ces atomes se comportent comme un atome d'Hydrogène avec un noyau de charge électrique réduite  $Z > 1$ .*

*L'électron est soumis au potentiel*

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (73)$$

a) Donner l'expression du Lagrangien du système en coordonnées sphériques Le Lagrangien est la différence de l'énergie cinétique et potentiel de l'électron donc

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (74)$$

Comme le Lagrangien est invariant par rotations on passe en coordonnées sphé-



riques

$$\vec{r} = r \vec{u}_r \quad (75)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \left( \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \sin \theta \frac{d\phi}{dt} \vec{u}_\phi \right). \quad (76)$$

En utilisant la notation  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ , le Lagrangien prend la forme

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (77)$$

b) *Obtenir les équations d'Euler-Lagrange.* Les moments conjugués sont

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad (78)$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} \quad (79)$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}. \quad (80)$$

Pour la coordonnée radiale  $r$  on a l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = mr (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (81)$$

Pour la coordonnée angulaire  $\theta$  on a l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{mr^2}{2} \sin(2\theta) \dot{\phi}^2. \quad (82)$$

Pour la coordonnée angulaire  $\phi$  on a l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{dp_\phi}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (83)$$

c) *Montrer l'existence de quantités conservées. Interpréter.* Comme le potentiel est central le moment cinétique total  $\vec{J} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$  est conservé, car

$$\frac{d}{dt} \vec{J} = \vec{r} \times \frac{d}{dt} (m\dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = 0 \quad (84)$$

car pour un potentiel central  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} \propto \vec{r}$ .

On constate que  $p_\phi$  le moment conjugué à l'angle  $\phi$  est une quantité conservée. C'est une conséquence du fait que le Lagrangien est indépendant de la variable  $\phi$ . Elle se traduit par l'invariance par rotation du système autour de l'axe  $\mathcal{O}z$ . On vérifie que la quantité conservée est la projection du moment angulaire  $\vec{J} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$

#### 14. Corrigé du second devoir à la maison

sur cet axe

$$p_\phi = \vec{j} \cdot \vec{u}_z \quad (85)$$

où l'on a utilisé que  $\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$ .

L'énergie du système est conservée par le lagrangien ne dépend pas du temps.

Et finalement, le vecteur de Runge-Lenz est conservé.

### 14.4. Pendule sphérique

On considère une masse  $m$  attachée à l'extrémité d'une tige rigide de masse négligeable, l'autre extrémité étant fixe par rapport au laboratoire. La longueur de la tige est  $R$ . On note  $\varphi$  la colatitude (le pôle de la sphère étant choisi à la verticale de son centre) et  $\theta$  la longitude (cf. figure 1).



FIGURE 1. – Schéma d'un pendule sphérique et photographie d'un manège fonctionnant selon le principe du pendule sphérique.

a) Écrire le Lagrangien pour le pendule sphérique.

L'énergie cinétique du pendule est

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (86)$$

l'énergie potentielle

$$V = mgz, \quad (87)$$

La contrainte du mouvement sur une sphère de rayon  $R$  est

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (88)$$

en utilisant les angles d'Euler

$$x = R \sin \theta \cos \varphi \quad (89)$$

$$y = R \sin \theta \sin \varphi \quad (90)$$

$$z = R \cos \theta, \quad (91)$$

on en déduit le Lagrangien

$$\mathcal{L} := T - V \quad (92)$$

$$= \frac{mR^2}{2} \left( \dot{\theta}^2 + (\sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2 \right) - mgR \cos \theta. \quad (93)$$

- b) En déduire que  $\varphi$ , définit dans la figure 2, est une variable cyclique. Quelle est la quantité conservée associée ? Trouvez l'autre quantité conservée.

Le Lagrangien est indépendant de  $\varphi$  donc

$$p_\varphi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 (\sin \theta)^2 \dot{\varphi} \quad (94)$$

est une constante du mouvement conservée dans le temps.

L'autre quantité conservée est l'énergie car le Lagrangien ne dépend pas du temps (c'est la fonctionnelle de Beltrami discutée en PC3 appliqué au cas à deux variables)

$$\mathcal{H} := \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} \left( \dot{\theta}^2 + (\sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2 \right) + mgR \cos \theta. \quad (95)$$

- c) Montrer que l'angle  $\theta$  satisfait une équation de la forme

$$\frac{d\theta}{dt} = f(\theta, E_1, E_2) \quad (96)$$

où  $f$  est une fonction (que l'on explicitera) de  $\theta$  et de deux constantes du mouvement  $E_1$  et  $E_2$  (que l'on interprétera).

Puisque l'énergie est conservée alors

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2\mathcal{H}}{mR^2} - \frac{2g}{R} \cos \theta - (\sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2 \quad (97)$$

mais  $(\sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2 = p_\varphi^2 / (mR^2)$  donc

$$\dot{\theta} = \left( \frac{2\mathcal{H}}{mR^2} - \frac{2g}{R} \cos \theta - \frac{p_\varphi^2}{m^2 R^4 \sin^2 \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (98)$$

*14. Corrigé du second devoir à la maison*

# 15. Corrigé du second devoir à la maison (2012)

Devoir donné en 2012

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

Avis au lecteur :

Dans ce texte les questions sont *italiques*, les solutions sont en caractères droits.

## 15.1. Équation de Maxwell et sources

Le rang de covariance d'un tenseur est augmenté d'une unité par l'action de l'opérateur  $\partial$  de « composantes »  $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\} \equiv (\frac{\partial_t}{c}, \vec{\nabla})$ . Le tenseur métrique ( $\eta_{\mu\nu}$  ou son inverse  $\eta^{\mu\nu}$ ) et le tenseur antisymétrique de Levi-Civita ( $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  ou  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  avec  $\varepsilon^{0123} = 1 = -\varepsilon_{0123}$ ) peuvent aussi être utilisés pour engendrer de nouveaux tenseurs ou scalaires (invariants) à partir de tenseurs préalablement définis.

Si l'on considère le tenseur de Faraday  $\mathbf{F}$  décrit le champ électromagnétique. Ses composantes  $F_{\mu\nu}$  forment la matrice suivante :

$$F_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

alors

$$F^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma}. \quad (2)$$

a) Montrer l'équivalence

$$F^\mu = 0 \iff \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (3)$$

$$F^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = \frac{1}{3} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}) \quad (4)$$

Comme

$$\frac{1}{6} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} F^\lambda = \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} \quad (5)$$

on en déduit (3).

Remarque nous aurions pu travailler sans expliciter les coordonnées en posant

15. Corrigé du second devoir à la maison (2012)

$$\mathbf{F}_1 := F^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (6)$$

$$\mathbf{dF} := (\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}) \mathbf{e}^\mu \otimes \mathbf{e}^\nu \otimes \mathbf{e}^\rho \quad (7)$$

il faut alors montrer que  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{dF}$ . Nous avons

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{3} (\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{e}_\mu \quad (8)$$

il suffit de réaliser que

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{e}_\mu = 3 \mathbf{e}^\mu \otimes \mathbf{e}^\nu \otimes \mathbf{e}^\rho. \quad (9)$$

On a vu en PC5 que cette équation implique les équations de Maxwell suivantes

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{absence de monopôles magnétiques} \quad (10)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{loi de Faraday} \quad (11)$$

b) Vérifiez les expressions des invariants relativistes du champs électromagnétique

$$\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -2 \left( \frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2 \right), \quad (12)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -\frac{8}{c} \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (13)$$

Sous une transformation de Lorentz  $\Lambda$  nous avons vu en PC7 que

$$F'_{\mu\nu} = F_{\rho\sigma} \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma, \quad (14)$$

donc

$$I_1 = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta \Lambda_\rho{}^\gamma \Lambda_\sigma{}^\delta F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \quad (15)$$

$$I_2 = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta \Lambda_\rho{}^\gamma \Lambda_\sigma{}^\delta F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \quad (16)$$

Mais

$$\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\rho{}^\gamma = \eta^{\alpha\gamma} \quad (17)$$

car la transformation de Lorentz préserve la métrique (ou de manière équivalente le produit scalaire entre deux quadri-vecteurs) comme nous l'avons vu en PC3. Donc

$$I_1 = \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}. \quad (18)$$

Maintenant remarquons que

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta \Lambda_\rho{}^\gamma \Lambda_\sigma{}^\delta = (\det \Lambda) \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (19)$$

### 15.1. Équation de Maxwell et sources

Pour prouver cette identité, choisissez des valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  et utiliser la définition du déterminant d'une matrice comme une somme alternée sur les permutations  $\mathfrak{S}_4$  de (1234)

$$\det \Lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} |\sigma| \Lambda_{1\sigma(1)} \Lambda_{2\sigma(2)} \Lambda_{3\sigma(3)} \Lambda_{4\sigma(4)} \quad (20)$$

les valeurs de  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  correspondent à la signature de la permutation  $(1234) \rightarrow (\mu\nu\rho\sigma)$ . Comme les transformations de Lorentz ont  $\det \Lambda = 1$  puisque nous sommes dans la composante  $SO^{+\uparrow}(1, 3)$  du groupe des transformations (cf. PC3), et  $I_2$  est bien un invariant relativiste.

Montrons maintenant l'équation (16).

$$I_2 = 8 (\varepsilon^{0123} F_{01} F_{23} + \varepsilon^{0213} F_{02} F_{13} + \varepsilon^{0321} F_{03} F_{21}) \quad (21)$$

$$= 8 \left( \frac{E_x}{c} (-B_x) - \frac{E_y}{c} (B_y) - \frac{E_z}{c} (B_z) \right) \quad (22)$$

$$= -8 \frac{E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z}{c} = -8 \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{c} \quad (23)$$

c) Montrez que l'équation

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad (24)$$

implique les équations de Maxwell avec sources

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{loi de Gauss} \quad (25)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{loi d'Ampère} \quad (26)$$

où  $\rho$  et  $\vec{j}$  sont les densités de charge et de courant (rappel :  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ ).

Tout d'abord spécifions  $\nu = 0$ . Nous avons la suite d'équivalences suivante

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 j^0 \quad (27)$$

$$\iff \partial_i F^{i0} = \mu_0 c \rho \quad (28)$$

$$\iff \partial_i \frac{E^i}{c} = \mu_0 c \rho \quad (29)$$

$$\iff \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (30)$$

15. Corrigé du second devoir à la maison (2012)

pour  $\nu = i$  avec  $i = 1, 2, 3$  on a la suite d'équivalence suivante

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \mu_0 j^i \quad (31)$$

$$\iff \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = \mu_0 j^i \quad (32)$$

$$\iff -\frac{\partial}{\partial(ct)} \frac{E^i}{c} + \epsilon^{ijk} \partial_j B_k = \mu_0 j^i \quad (33)$$

$$\iff -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E^i}{\partial t} + (\vec{\nabla} \times \vec{B})^i = \mu_0 j^i \quad (34)$$

d) Montrer que  $\mathbf{J} = \{j^\nu, \nu = 0, 1, 2, 3\} := (c\rho, \vec{j} = \rho \vec{v})$  sont les composantes d'un quadri-vecteur  $\mathbf{J}$ , dit de densité de courant, si la charge électrique est invariante sous les transformation de Lorentz.

Comme  $\mathbf{J} = \rho(c, \vec{v}) = \rho \mathbf{U}$  puisque  $\rho$  est invariant de Lorentz avec  $\mathbf{J}$  est un quadri-vecteur de même nature que  $\mathbf{U}$ .

Alternativement, comme nous savons que  $j^\mu = \mu_0^{-1} \partial_\nu F^{\mu\nu}$  est comme la dérivée d'un quadri-tenseur est un quadri-tenseur, alors  $j^\mu$  sont les composantes d'un quadri-vecteur.

On peut aussi écrire ces équations sans expliciter les indices en introduisant

$$\mathbf{d} \star \mathbf{F} := \partial_\mu F^{\mu\nu} \mathbf{e}_\nu \quad (35)$$

Alors l'équation de Maxwell avec source s'écrit

$$\mathbf{d} \star \mathbf{F} = \mu_0 \star \mathbf{J}. \quad (36)$$

En utilisant le tenseur  $\epsilon$  on montre que

$$6 \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \epsilon_{\kappa\lambda\rho\sigma} \partial_\mu F^{\rho\sigma} = \partial_\mu F^{\mu\nu}. \quad (37)$$

Sinon pose

$$\star \mathbf{F} := \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \mathbf{e}^\rho \otimes \mathbf{e}^\sigma \quad (38)$$

$$\star \mathbf{J} := \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_\sigma \mathbf{e}^\rho \otimes \mathbf{e}^\sigma \otimes \mathbf{e}^\rho \quad (39)$$

Les équations de Maxwell sans sources et avec sources s'écrivent alors

$$\mathbf{dF} = 0 \quad (40)$$

$$\mathbf{d} \star \mathbf{F} = \mu_0 \star \mathbf{J}. \quad (41)$$

e) Montrer que les équations inhomogènes de Maxwell imposent l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (42)$$



### 15.1. Équation de Maxwell et sources

La divergence de (26) donne

$$-\frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (43)$$

la dérivée temporelle de (25) donne

$$\partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \partial_t \varrho \quad (44)$$

en combinant ces deux équations on obtient la relation de continuité demandée.

f) Écrire cette équation en utilisant le quadri-vecteur  $\mathbf{J}$ . Obtenir cette équation directement à partir de (24).

Cette équation s'écrit simplement

$$\partial_{ct}(c\rho) + \partial_i j^i = \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (45)$$

En dérivant (24) on obtient

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 \partial_\nu J^\nu \quad (46)$$

mais comme  $F^{\mu\nu}$  est antisymétrique le membre de gauche est nul.

En utilisant les notations introduites dans (39) cette équation s'écrit simplement comme

$$(\mathbf{d} \star \mathbf{J}) = 0. \quad (47)$$

Nous avons vu en PC5 que les équations homogènes de Maxwell dans (3), ou de manière équivalente (10)-(11) sont satisfaites si  $F_{\mu\nu}$  résulte d'une forme de potentiel  $\mathbf{A} = (A^0/c, \vec{A})$  selon

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (48)$$

Nous avons vu que  $\mathbf{A}$  est défini à la dérivée d'une fonction arbitraire près

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' + \nabla \chi \quad (49)$$

Nous avons vu aussi que pour fixer cette liberté de jauge, on impose une contrainte. Une contrainte invariante de Lorentz est la jauge de Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (50)$$

g) Montrer que dans cette jauge les équations de Maxwell inhomogènes deviennent

$$\square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (51)$$

où  $\square := \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$  est l'opérateur d'Alembertien.

15. Corrigé du second devoir à la maison (2012)

On applique (24)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \square A^\nu. \quad (52)$$

## 15.2. Effet de seuil

On considère la réaction de désintégration d'un pion  $\pi^-$  sur un proton  $p^+$  considéré au repos dans le repère du laboratoire

$$\pi^- + p^+ \rightarrow K^0 + \Lambda^0 \quad (53)$$

Le méson pion  $\pi^-$ , composé par la paire de quark  $\bar{u}d$ , a une masse  $m_{\pi^-}c^2 = 140 \text{ MeV}$ . Le baryon proton, composé des trois quarks  $uud$ , a une masse  $m_{p^+}c^2 = 938 \text{ MeV}$ . Le méson kaon  $K^0$ , est une superposition des états liés des paires de quarks  $d\bar{s}$  et  $\bar{d}s$ . Il a une masse de  $m_{K^0}c^2 = 498 \text{ MeV}$ . Finalement, le baryon  $\Lambda^0$ , composé des trois quarks  $uds$ , a une masse de  $m_{\Lambda^0} = 1116 \text{ MeV}$ .

a) Calculez l'énergie de seuil du pion pour la réaction puisse avoir lieu

En considérant le quadri-impulsion initiale  $\mathbf{P}^{initiale} = \mathbf{P}_{\pi^-} + \mathbf{P}_{p^+}$

$$s = (\mathbf{P}^{initiale})^2 = (m_{\pi^-}^2 + m_{p^+}^2)c^2 + 2\mathcal{E}_{\pi^-}\mathcal{E}_{p^+} \geq (m_{K^0}^2 + m_{\Lambda^0}^2)c^2 \quad (54)$$

comme  $\mathcal{E}_{p^+} = m_{p^+}c^2$  car le proton est au repos. On a donc l'inégalité suivante

$$\mathcal{E}_{\pi^-} \geq \frac{(m_{K^0} + m_{\Lambda^0})^2 - (m_{\pi^-}^2 + m_{p^+}^2)}{2m_{p^+}} c^2 \quad (55)$$

donc

$$\mathcal{E}_{\pi^-} \geq 909.14 \text{ MeV} \quad (56)$$

Dans une expérience où le pion a une énergie cinétique incidente de  $2.36 \text{ GeV}$ , le baryon  $\Lambda^0$  est observé avec une énergie cinétique de  $0.15 \text{ GeV}$ , et dans une direction à  $45^\circ$  par rapport au mouvement du pion. On rappelle que  $1 \text{ GeV} = 10^3 \text{ MeV}$ .

b) Calculez le facteur  $\gamma^{\text{CM}}$  dans le repère du centre de masse. La quadri-impulsion initiale

$$\mathbf{P}^{initial} = \mathbf{P}_{\pi^-} + \mathbf{P}_{p^+} = \left( \frac{\mathcal{E}_{\pi^-} + m_{p^+}c^2}{\vec{p}_{\pi^-}^c} \right)_{\text{laboratoire}}. \quad (57)$$

Pour passer dans le référentiel du centre de masse

$$\mathbf{P}^{initial} = \begin{pmatrix} m_t c \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{CM}}, \quad (58)$$

avec

$$s = (\mathbf{P}^{initial})^2 = (m_t c)^2 = (m_{\pi^-}^2 + m_{p^+}^2)c^2 + 2\mathcal{E}_{\pi^-}m_{p^+}. \quad (59)$$

Dans le référentiel du laboratoire la quadri-impulsion a pour composantes

$$\mathbf{P}^{initial} = \gamma^{CM} \begin{pmatrix} m_t c \\ \vec{p} \end{pmatrix}_{\text{laboratoire}}, \quad (60)$$

on en déduit donc

$$\gamma^{CM} = \frac{\mathcal{E}_{\pi^-} + m_{p^+} c^2}{m_t c^2}. \quad (61)$$

Comme l'énergie du Pion est de

$$\mathcal{E}_{\pi^-} = \mathcal{T}_{\pi^-} + m_{\pi^-} c^2 = 2503.92 \text{ MeV} \quad (62)$$

$$m_t c^2 = 2365.75 \text{ MeV}, \quad (63)$$

donc

$$\gamma^{CM} = 1.455. \quad (64)$$

c) Calculez l'énergie cinétique du kaon  $K^0$  dans le repère du laboratoire et du centre de masse.

Comme  $\mathbf{P}_{\pi^-} + \mathbf{P}_{p^+} = \mathbf{P}_{\Lambda^0} + \mathbf{P}_{K^0}$  alors

$$(\mathbf{P}_{K^0} - \mathbf{P}_{p^+})^2 = (m_{K^0}^2 + m_{p^+}^2) c^2 - 2\mathcal{E}_{K^0} m_{p^+} \quad (65)$$

$$= (m_{\Lambda^0}^2 + m_{\pi^-}^2) c^2 - 2(\mathcal{E}_{\Lambda^0} \mathcal{E}_{\pi^-} - \vec{p}_{\Lambda^0} \cdot \vec{p}_{\pi^-}) \quad (66)$$

Alors

$$\mathcal{E}_{K^0} = \frac{(m_{K^0}^2 + m_{p^+}^2 - m_{\Lambda^0}^2 - m_{\pi^-}^2) c^2 + 2(\mathcal{E}_{\Lambda^0} \mathcal{E}_{\pi^-} - \vec{p}_{\Lambda^0} \cdot \vec{p}_{\pi^-})}{2m_{p^+}} \quad (67)$$

Cette relation est équivalente à la conservation de l'énergie

$$\mathcal{E}_{\pi^-} + \mathcal{E}_{p^+} = \mathcal{E}_{\Lambda^0} + \mathcal{E}_{K^0} \quad (68)$$

Si on utilise la conservation de l'impulsion  $\vec{p}_{\pi^-} = \vec{p}_{\Lambda^0} + \vec{p}_{K^0}$  et que  $\mathcal{E}_{K^0} = m_{K^0}^2 c^4 + \vec{p}_{K^0}^2 c^2$ . L'énergie du  $\Lambda^0$  dans le référentiel du laboratoire est

$$\mathcal{E}_{\Lambda^0} = 1267.1 \text{ MeV}. \quad (69)$$

ainsi que

$$c^2 p_{\Lambda^0}^2 = \mathcal{E}_{\Lambda^0}^2 - m_{\Lambda^0}^2 c^4 = (600 \text{ MeV})^2 \quad (70)$$

$$c^2 p_{\pi^-}^2 = \mathcal{E}_{\pi^-}^2 - m_{\pi^-}^2 c^4 = (2500 \text{ MeV})^2 \quad (71)$$

avec  $\vec{p}_{\pi^-} \cdot \vec{p}_{\Lambda^0} = |p_{\pi^-}| |p_{\Lambda^0}| \cos(\pi/4) \simeq (1030 \text{ MeV}/c)^2$ . Donc l'énergie cinétique vaut

$$\mathcal{T}_{K^0} = \mathcal{E}_{K^0} - m_{K^0} c^2 = 1680.43 \text{ MeV} \quad (72)$$

Dans le référentiel du centre nous avons que

15. Corrigé du second devoir à la maison (2012)

$$\mathbf{P}^{initial} = \begin{pmatrix} m_t c \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{CM}} = \mathbf{P}^{final} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{K^0}^{\text{CM}} + \mathcal{E}_{\Lambda^0}^{\text{CM}} \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \quad (73)$$

or en utilisant que  $\vec{p}_{\Lambda^0}^{\text{CM}} = -\vec{p}_{K^0}^{\text{CM}}$  on a la relation suivante

$$(\mathcal{E}_{\Lambda^0}^{\text{CM}})^2 = m_{\Lambda^0}^2 c^4 + (\vec{p}_{\Lambda^0}^{\text{CM}})^2 \quad (74)$$

$$= (m_{\Lambda^0}^2 - m_{K^0}^2) c^4 + (\mathcal{E}_{K^0}^{\text{CM}})^2 \quad (75)$$

l'énergie cinétique valent

$$\mathcal{E}_{K^0}^{\text{CM}} = \frac{m_t^2 + m_{K^0}^2 - m_{\Lambda^0}^2}{m_t} c^2 = 972.1 \text{ MeV} \quad (76)$$

$$\mathcal{T}_{K^0}^{\text{CM}} = \mathcal{E}_{K^0}^{\text{CM}} - m_{K^0} c^2 = 474.1 \text{ MeV}. \quad (77)$$

### 15.2.1. Contexte historique et expérimental

Depuis leur découverte en 1947 les Kaons ont été une source d'information importante sur la nature des interactions fondamentales. Ils ont joué un rôle important dans la compréhension du modèle des quarks. Les Kaons portent un nombre quantique d'étrangeté  $S$ , induit par Murray Gell-Mann (Nobel 1969) et Kazuhiko Nishijima. Ils introduisirent ce nombre quantique pour expliquer la facile production des Kaons et leur désintégration plus lente que ce qui est attendu compte tenu de leur masse. Ce nouveau nombre quantique d'étrangeté est postulé être conservé lors des collisions (comme pour celle donnée ci dessus), mais pas lors de la désintégration de la particule.

Un autre particularité du Kaon neutre  $K^0$  est d'avoir une antiparticule violant la symétrie de parité. La Kaon court  $K_S^0 = (d\bar{s} + s\bar{d})/\sqrt{2}$  a un temps de vie de deux ordre de grandeur inférieur à celui du Kaon long  $K_L^0 = (d\bar{s} - s\bar{d})/\sqrt{2}$ . Ces particules sont leur propre antiparticule.

C'est en utilisant des Kaons qu'a été découverte de la violation de la symétrie  $CP$ , responsable de l'asymétrie entre matière et antimatière dans l'univers. Cette expérience a reçu le prix Nobel en 1980.

### 15.3. Pendule sphérique

On considère une masse  $m$  attachée à l'extrémité d'une tige rigide de masse négligeable, l'autre extrémité étant fixe par rapport au laboratoire. La longueur de la tige est  $R$ . On note  $\varphi$  la colatitude (le pôle de la sphère étant choisi à la verticale de son centre) et  $\theta$  la longitude (cf. figure 1).

a) Écrire le Lagrangien pour le pendule sphérique.

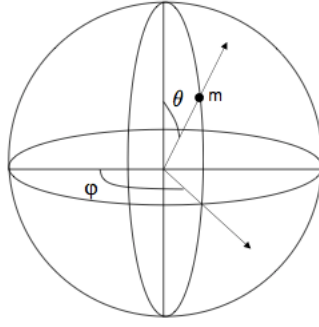


FIGURE 1. – Pendule sphérique

L'énergie cinétique du pendule est

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (78)$$

l'énergie potentielle

$$V = mgz, \quad (79)$$

La contrainte du mouvement sur une sphère de rayon  $R$  est

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (80)$$

en utilisant les angles d'Euler

$$x = R \sin \theta \cos \varphi \quad (81)$$

$$y = R \sin \theta \sin \varphi \quad (82)$$

$$z = R \cos \theta, \quad (83)$$

on en déduit le Lagrangien

$$\mathcal{L} := T - V \quad (84)$$

$$= \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + (\sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2) - mgR \cos \theta. \quad (85)$$

- b) En déduire que  $\varphi$  est une variable cyclique. Quelle est la quantité conservée associée ? Trouvez l'autre quantité conservée.

Le Lagrangien est indépendant de  $\phi$  donc

$$p_\varphi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 (\sin \varphi)^2 \dot{\varphi} \quad (86)$$

est une constante du mouvement conservée dans le temps.

15. Corrigé du second devoir à la maison (2012)

L'autre quantité conservée est l'énergie car le Lagrangien ne dépend pas du temps

$$\mathcal{H} := \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} \left( \dot{\theta}^2 + (\sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2 \right) + mgR \cos \theta. \quad (87)$$

c) Montrer que l'on a

$$\frac{d\theta}{dt} = f(\theta, E_1, E_2) \quad (88)$$

où  $f$  est une fonction (que l'on explicitera) de  $\theta$  et de deux constantes du mouvement  $E_1$  et  $E_2$  (que l'on interprétera).

Puisque l'énergie est conservée alors

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2\mathcal{H}}{mR^2} - \frac{2g}{R} \cos \theta - (\sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2 \quad (89)$$

mais  $(\sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2 = p_\varphi / (mR^2)$  donc

$$\dot{\theta} = \left( \frac{2\mathcal{H}}{mR^2} - \frac{2g}{R} \cos \theta - \frac{p_\varphi}{mR^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (90)$$

La résolution de cette équation s'exprime au moyen de la fonction elliptique de première espèce  $F(x, k)$

$$t = A \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{dx}{\sqrt{B + \cos(x)}} = \frac{2iA}{\sqrt{1-B}} \left[ \text{sign}(\sin(\frac{x}{2})) F\left(\cos(\frac{x}{2}), \sqrt{\frac{2}{1-B}}\right) \right]_{\theta_0}^{\theta(t)} \quad (91)$$

où  $B = \frac{\mathcal{H}}{mgR} - \frac{p_\varphi}{2mgR}$  et  $A = \sqrt{R/(2g)}$ .

Les fonctions elliptiques ont été introduites par Jacobi, Legendre et d'autre pour la résolution des équations différentielles des systèmes physique comme les pendules.

Les manèges sont des pendules, et certains de pendules sphériques comme sur la photographie ci-dessous



FIGURE 2. – Manège fonctionnant comme un pendule sphérique

# 16. Corrigé du second devoir à la maison

donné en 2013

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

à rendre en PC 8 (11/01/2013)

**Avis au lecteur :**

Dans ce texte les questions sont *italiques*, les solutions sont en caractères droits.

## 16.1. Équation de Maxwell et sources

Le rang de covariance d'un tenseur est augmenté d'une unité par l'action de l'opérateur  $\partial$  de « composantes »  $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\} \equiv (\frac{\partial_t}{c}, \vec{\nabla})$ . Le tenseur métrique ( $\eta_{\mu\nu}$  ou son inverse  $\eta^{\mu\nu}$ ) et le tenseur antisymétrique de Levi-Civita ( $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  ou  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  avec  $\varepsilon^{0123} = 1 = -\varepsilon_{0123}$ ) peuvent aussi être utilisés pour engendrer de nouveaux tenseurs ou scalaires (invariants) à partir de tenseurs préalablement définis.

Si l'on considère le tenseur de Faraday  $\mathbf{F}$  décrit le champ électromagnétique. Ses composantes  $F_{\mu\nu}$  forment la matrice suivante :

$$F_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & E^x/c & E^y/c & E^z/c \\ -E^x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E^y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E^z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

alors

$$F^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma}. \quad (2)$$

a) Montrer l'équivalence

$$F^\mu = 0 \iff \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (3)$$

$$F^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = \frac{1}{3} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}) \quad (4)$$

Comme

$$\frac{1}{6} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} F^\lambda = \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} \quad (5)$$

on en déduit (3).

16. Corrigé du second devoir à la maison

Remarque nous aurions pu travailler sans expliciter les coordonnées en posant

$$\mathbf{F}_1 := F^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (6)$$

$$\mathbf{dF} := (\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}) \mathbf{e}^\mu \wedge \mathbf{e}^\nu \wedge \mathbf{e}^\rho \quad (7)$$

il faut alors montrer que  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{dF}$ . Nous avons

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{3} (\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{e}_\mu \quad (8)$$

il suffit de réaliser que

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{e}_\mu = 3 \mathbf{e}^\mu \wedge \mathbf{e}^\nu \wedge \mathbf{e}^\rho. \quad (9)$$

On a vu en PC5 que cette équation implique les équations de Maxwell suivantes

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{absence de monopôles magnétiques} \quad (10)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{loi de Faraday} \quad (11)$$

b) Vérifiez les expressions des invariants relativistes du champs électromagnétique

$$\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -2 \left( \frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2 \right), \quad (12)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -\frac{8}{c} \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (13)$$

Sous une transformation de Lorentz  $\Lambda$

$$F'_{\mu\nu} = F_{\rho\sigma} \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma, \quad (14)$$

donc

$$I_1 = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta \Lambda_\rho{}^\gamma \Lambda_\sigma{}^\delta F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \quad (15)$$

$$I_2 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta \Lambda_\rho{}^\gamma \Lambda_\sigma{}^\delta F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \quad (16)$$

Mais

$$\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\rho{}^\gamma = \eta^{\alpha\gamma} \quad (17)$$

car la transformation de Lorentz préserve la métrique (ou de manière équivalente le produit scalaire entre deux quadri-vecteurs) comme nous l'avons vu en PC3.

Donc

$$I_1 = \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}. \quad (18)$$



Maintenant remarquons que

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \Lambda_\rho^\gamma \Lambda_\sigma^\delta = (\det \Lambda) \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (19)$$

Pour prouver cette identité, choisissez des valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  et utiliser la définition du déterminant d'une matrice comme une somme alternée sur les permutations  $\mathfrak{S}_4$  de (1234)

$$\det \Lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} |\sigma| \Lambda_{1\sigma(1)} \Lambda_{2\sigma(2)} \Lambda_{3\sigma(3)} \Lambda_{4\sigma(4)} \quad (20)$$

les valeurs de  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  correspondent à la signature de la permutation  $(1234) \rightarrow (\mu\nu\rho\sigma)$ . Comme les transformations de Lorentz ont  $\det \Lambda = 1$  puisque nous sommes dans la composante  $SO^{+\uparrow}(1, 3)$  du groupe des transformations (cf. PC3), et  $I_2$  est bien un invariant relativiste.

Montrons maintenant l'équation (16).

$$I_2 = 8 (\varepsilon^{0123} F_{01} F_{23} + \varepsilon^{0213} F_{02} F_{13} + \varepsilon^{0321} F_{03} F_{21}) \quad (21)$$

$$= 8 \left( \frac{E_x}{c} (-B_x) - \frac{E_y}{c} (B_y) - \frac{E_z}{c} (B_z) \right) \quad (22)$$

$$= -8 \frac{E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z}{c} = -8 \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{c} \quad (23)$$

c) Montrez que l'équation

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad (24)$$

implique les équations de Maxwell avec sources

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{loi de Gauss} \quad (25)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{loi d'Ampère} \quad (26)$$

où  $\rho$  et  $\vec{j}$  sont les densités de charge et de courant (rappel :  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ ).

Tout d'abord spécifions  $\nu = 0$ . Nous avons la suite d'équivalences suivante

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 j^0 \quad (27)$$

$$\iff \partial_i F^{i0} = \mu_0 c \rho \quad (28)$$

$$\iff \partial_i \frac{E^i}{c} = \mu_0 c \rho \quad (29)$$

$$\iff \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (30)$$

16. Corrigé du second devoir à la maison

pour  $\nu = i$  avec  $i = 1, 2, 3$  on a la suite d'équivalence suivante

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \mu_0 j^i \quad (31)$$

$$\iff \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = \mu_0 j^i \quad (32)$$

$$\iff -\frac{\partial}{\partial(ct)} \frac{E^i}{c} + \epsilon^{ijk} \partial_j B_k = \mu_0 j^i \quad (33)$$

$$\iff -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E^i}{\partial t} + (\vec{\nabla} \times \vec{B})^i = \mu_0 j^i \quad (34)$$

d) Montrer que  $\mathbf{J} = \{j^\nu, \nu = 0, 1, 2, 3\} := (c\rho, \vec{j} = \rho \vec{v})$  sont les composantes d'un quadrivecteur  $\mathbf{J}$ , dit de densité de courant, si la charge électrique est invariante sous les transformation de Lorentz.

Comme  $\mathbf{J} = \frac{\rho}{\gamma}(c, \vec{v}) = \frac{\rho}{\gamma} \mathbf{U}$  puisque  $\mathbf{U}$  est invariant de Lorentz il faut montrer que  $\rho/\gamma$  est invariant de Lorentz. On dit que la charge  $Q$  est invariante donc la densité de charge  $\rho = dQ/dV$  est sensible à la contraction des longueurs. Sous une transformation de Lorentz  $dV \rightarrow dV/\gamma$ , et le facteur  $\gamma$  est justement présent pour compenser cet effet sur la densité de charge.

Alternativement, comme nous savons que  $j^\mu = \mu_0^{-1} \partial_\nu F^{\mu\nu}$  est comme la dérivée d'un quadri-tenseur est un quadri-tenseur, alors  $j^\mu$  sont les composantes d'un quadri-vecteur.

On peut aussi écrire ces équations sans expliciter les indices en introduisant

$$\mathbf{d} \star \mathbf{F} := \partial_\mu F^{\mu\nu} \mathbf{e}_\nu \quad (35)$$

Alors l'équation de Maxwell avec source s'écrit

$$\mathbf{d} \star \mathbf{F} = \mu_0 \star \mathbf{J} . \quad (36)$$

En utilisant le tenseur  $\epsilon$  on montre que

$$6 \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \epsilon_{\kappa\lambda\rho\sigma} \partial_\mu F^{\rho\sigma} = \partial_\mu F^{\mu\nu} . \quad (37)$$

Sinon pose

$$\star \mathbf{F} := \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \mathbf{e}^\rho \otimes \mathbf{e}^\sigma \quad (38)$$

$$\star \mathbf{J} := \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_\sigma \mathbf{e}^\rho \otimes \mathbf{e}^\sigma \otimes \mathbf{e}^\rho \quad (39)$$

Les équations de Maxwell sans sources et avec sources s'écrivent alors

$$\mathbf{dF} = 0 \quad (40)$$

$$\mathbf{d} \star \mathbf{F} = \mu_0 \star \mathbf{J} . \quad (41)$$

e) Montrer que les équations inhomogènes de Maxwell imposent l'équation de continuité

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (42)$$

La divergence de (26) donne

$$-\frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (43)$$

la dérivée temporelle de (25) donne

$$\partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \partial_t \varrho \quad (44)$$

en combinant ces deux équations on obtient la relation de continuité demandée.

f) Écrire cette équation en utilisant le quadri-vecteur  $\mathbf{J}$ . Obtenir cette équation directement à partir de (24).

Cette équation s'écrit simplement

$$\partial_{ct}(c\rho) + \partial_i j^i = \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (45)$$

En dérivant (24) on obtient

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 \partial_\nu J^\nu \quad (46)$$

mais comme  $F^{\mu\nu}$  est antisymétrique le membre de gauche est nul.

En utilisant les notations introduites dans (39) cette équation s'écrit simplement comme

$$(\mathbf{d} \star \mathbf{J}) = 0. \quad (47)$$

Nous avons vu en PC5 que les équations homogènes de Maxwell dans (3), ou de manière équivalente (10)-(11) sont satisfaites si  $F_{\mu\nu}$  résulte d'une forme de potentiel  $\mathbf{A} = (A^0/c, \vec{A})$  selon

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (48)$$

Nous avons vu que  $\mathbf{A}$  est défini à la dérivée d'une fonction arbitraire près

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' + \nabla \chi \quad (49)$$

Nous avons vu aussi que pour fixer cette liberté de jauge, on impose une contrainte. Une contrainte invariante de Lorentz est la jauge de Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (50)$$

g) Montrer que dans cette jauge les équations de Maxwell inhomogènes deviennent

$$\square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (51)$$

## 16. Corrigé du second devoir à la maison

où  $\square := \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$  est l'opérateur d'Alembertien.

On applique (24)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \square A^\nu. \quad (52)$$

### 16.2. Géodésique sur la sphère

On veut déterminer le chemin le plus court entre deux points sur une sphère de rayon  $R$ .

a) Si  $s$  est un paramètre le long de la courbe exprimer la longueur du chemin selon

$$l(\vec{r}) = \int_{s_A}^{s_B} f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; s) ds. \quad (53)$$

L'arc élémentaire a une longueur

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) ds^2 \quad (54)$$

donc la fonctionnelle est

$$f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; s) = \sqrt{\dot{\vec{r}}^2}. \quad (55)$$

b) Afin de tenir compte de la contrainte que le mouvement s'effectue sur une sphère de rayon  $R$  on modifie cette fonction en introduisant un multiplicateur de Lagrange  $\mu(s)$ , et l'on cherche à minimiser

$$l(\vec{r}) = \int_{s_A}^{s_B} (f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; s) - \mu(s) g(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; s)) ds. \quad (56)$$

Donner l'expression de  $h(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; s) = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; s) - \mu(s) g(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; s)$ . Pour tenir compte de la contrainte  $\vec{r}^2 = x(s)^2 + y(s)^2 + z(s)^2 = R^2$  on considère la fonctionnelle

$$h(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; s) = \sqrt{\dot{\vec{r}}^2} - \mu(s) (\vec{r}^2 - R^2). \quad (57)$$

c) En déduire que le chemin le plus court est un grand cercle passant par les points  $A$  et  $B$ . L'équation d'Euler-Lagrange pour  $x$  donne

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -2\mu x \quad (58)$$

$$= \frac{d}{ds} \frac{\partial h}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{ds} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \quad (59)$$

Avec des équation similaires pour  $y$  et  $z$ . En notation vectoriel nous avons

$$\frac{d}{ds} \frac{\dot{\vec{r}}}{\sqrt{\dot{\vec{r}}^2}} = -2\mu \vec{r}. \quad (60)$$

On voit que  $\vec{r}$  est colinéaire au vecteur de norme unité  $\vec{u} := \vec{r}/\sqrt{r^2}$ . On en déduit que

$$\frac{d}{ds} (\vec{r} \times \vec{u}) = \frac{d\vec{r}}{ds} \times \vec{u} + \vec{r} \times \frac{d\vec{u}}{ds} = 0. \quad (61)$$

Où l'on a utilisé que  $\vec{r} \times \frac{d\vec{u}}{ds} = 0$  comme conséquence de (60). Par définition  $\vec{u}$  et  $d\vec{r}/ds$  sont colinéaires donc  $\frac{d\vec{r}}{ds} \times \vec{u} = 0$ . Ainsi le long de la trajectoire entre les points  $A$  et  $B$  le vecteur  $\vec{r} \times \vec{u}$  est constant. Les vecteurs  $\vec{r}$  et  $\vec{u}$  sont dans le plan équatorial passant par  $A$  et  $B$ . Cela donne deux cercles, un seul est le plus court.

### 16.3. L'atome d'hydrogénoïde

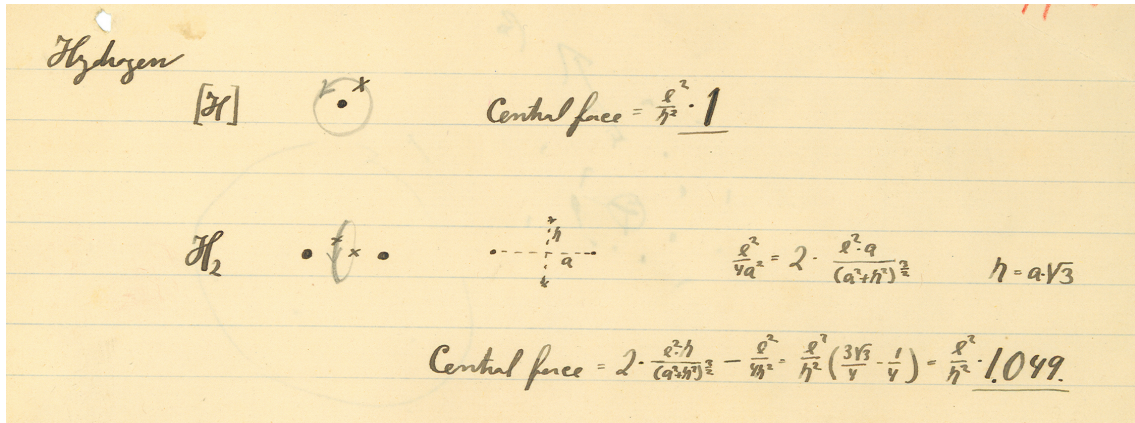


FIGURE 1. – manuscrit de l'article de Niels Bohr de juillet 1913 (avec la permission de l'« Archive Niels Bohr », Copenhague)

On considère un atome Hydrogénoïde, obtenu en arrachant à un atome tous ses électrons sauf un. Ces atomes se comportent comme un atome d'Hydrogène avec un noyau de charge électrique réduite  $Z > 1$ .

L'électron est soumis au potentiel

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (62)$$

a) Donner l'expression du Lagrangien du système en coordonnées sphériques Le Lagrangien est la différence de l'énergie cinétique et potentiel de l'électron donc

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (63)$$

Comme le Lagrangien est invariant par rotations on passe en coordonnées sphé-

16. Corrigé du second devoir à la maison

riques

$$\vec{r} = r \vec{u}_r \quad (64)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \left( \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \sin \theta \frac{d\phi}{dt} \vec{u}_\phi \right). \quad (65)$$

En utilisant la notation  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ , le Lagrangien prend la forme

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (66)$$

b) *Obtenir les équations d'Euler-Lagrange.* Les moments conjugués sont

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad (67)$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{r}^2 \dot{\theta} \quad (68)$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m\dot{r}^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}. \quad (69)$$

Pour la coordonnée radiale  $r$  on a l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\dot{r} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (70)$$

Pour la coordonnée angulaire  $\theta$  on a l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{m\dot{r}^2}{2} \sin(2\theta) \dot{\phi}^2. \quad (71)$$

Pour la coordonnée angulaire  $\phi$  on a l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{dp_\phi}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (72)$$

c) *Montrer l'existence de quantités conservées. Interpréter.* On constate que  $p_\phi$  le moment conjugué à l'angle  $\phi$  est une quantité conservée. C'est une conséquence du fait que le Lagrangien est indépendant de la variable  $\phi$ . Elle se traduit par l'invariance par rotation du système autour de l'axe  $\mathcal{O}z$ . On vérifie que la quantité conservée est la projection du moment angulaire  $\vec{j} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$  sur cet axe

$$p_\phi = \vec{j} \cdot \vec{u}_z \quad (73)$$

où l'on a utilisé que  $\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$ .

## 16.4. Pendule sphérique

On considère une masse  $m$  attachée à l'extrémité d'une tige rigide de masse négligeable, l'autre extrémité étant fixe par rapport au laboratoire. La longueur de la tige est  $R$ . On note  $\varphi$  la colatitute (le pôle de la sphère étant choisi à la verticale de son centre) et  $\theta$  la longitude (cf. figure 1).



FIGURE 2. – Schéma d'un pendule sphérique et photographie d'un manège fonctionnant selon le principe du pendule sphérique.

a) Écrire le Lagrangien pour le pendule sphérique.

L'énergie cinétique du pendule est

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (74)$$

l'énergie potentielle

$$V = mgz, \quad (75)$$

La contrainte du mouvement sur une sphère de rayon  $R$  est

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (76)$$

en utilisant les angles d'Euler

$$x = R \sin \theta \cos \varphi \quad (77)$$

$$y = R \sin \theta \sin \varphi \quad (78)$$

$$z = R \cos \theta, \quad (79)$$

on en déduit le Lagrangien

$$\mathcal{L} := T - V \quad (80)$$

$$= \frac{mR^2}{2} \left( \dot{\theta}^2 + (\sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2 \right) - mgR \cos \theta. \quad (81)$$

16. Corrigé du second devoir à la maison

- b) En déduire que  $\varphi$ , défini dans la figure 2, est une variable cyclique. Quelle est la quantité conservée associée ? Trouvez l'autre quantité conservée.

Le Lagrangien est indépendant de  $\phi$  donc

$$p_\varphi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2(\sin \theta)^2 \dot{\varphi} \quad (82)$$

est une constante du mouvement conservée dans le temps.

L'autre quantité conservée est l'énergie car le Lagrangien ne dépend pas du temps (c'est la fonctionnelle de Beltrami discutée en PC4 appliqué au cas à deux variables)

$$\mathcal{H} := \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} \left( \dot{\theta}^2 + (\sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2 \right) + mgR \cos \theta. \quad (83)$$

- c) Montrer que l'angle  $\theta$  satisfait une équation de la forme

$$\frac{d\theta}{dt} = f(\theta, E_1, E_2) \quad (84)$$

où  $f$  est une fonction (que l'on explicitera) de  $\theta$  et de deux constantes du mouvement  $E_1$  et  $E_2$  (que l'on interprétera).

Puisque l'énergie est conservée alors

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2\mathcal{H}}{mR^2} - \frac{2g}{R} \cos \theta - (\sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2 \quad (85)$$

mais  $(\sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2 = p_\varphi / (mR^2)$  donc

$$\dot{\theta} = \left( \frac{2\mathcal{H}}{mR^2} - \frac{2g}{R} \cos \theta - \frac{p_\varphi}{m^2 R^4 \sin^2 \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (86)$$



partCompléments : exercices non donnés, etc.

*16. Corrigé du second devoir à la maison*

Cinquième partie .

Suppléments



# 17. Suppléments

Relativité restreinte (PHY 431)

Pierre Vanhove

Dans ce chapitre sont réunis les exercices qui n'ont pas été donnés ou traités en PC. Les exercices sont ici des textes bruts non travaillés souvent copiés de ceux donnés par Cédric, François ou Marios.

## 17.1. Vitesse, célérité et rapidité

On peut définir trois vitesses différentes associées au mouvement relatif du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  : la vitesse (réduite)  $\beta = v/c$ , la rapidité  $\phi(v)$ , et la célérité  $\gamma\beta = \sinh \phi(v)$ .

a) Rappeler à quoi correspondent vitesse réduite et célérité.

Afin de déterminer un procédé expérimental pour mesurer la rapidité on considère un astronaute dans un vaisseau sans ouvertures. On suppose que cet astronaute est muni d'un accéléromètre (un fil à plomb par exemple). À l'instant initial la fusée est au repos par rapport à un repère fixe de référence  $\mathcal{R}$  formés par des étoiles fixes lointaines. À la fin de la phase d'accélération la fusée a une vitesse  $V$ .

On dénotera  $\mathcal{R}'$  le référentiel de la fusée à un instant donnée de son mouvement. Ce référentiel n'est plus galiléen car accéléré.

À un instant donné la fusée a une vitesse  $v$  par rapport au repère fixe  $\mathcal{R}$ . Pendant l'intervalle de temps propre  $d\tau$  infinitésimal la vitesse de la fusée s'accroît de  $dv'$  par rapport à son référentiel  $\mathcal{R}'$ .

- b) Déterminer l'accroissement de vitesse  $dv'$  mesurée dans la fusée par l'astronaute, en fonction de l'accroissement vitesse  $dv$  par rapport au repère fixe  $\mathcal{R}$ .
- c) Montrer que l'intégrale  $\int a d\tau$  pendant la phase d'accélération donne la rapidité.
- d) Interpréter le résultat. À quoi correspond la rapidité en physique galiléenne non relativiste.

### 17.1.1. Correction : Vitesse, célérité et rapidité

On peut définir trois vitesses différentes associées au mouvement relatif du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  : la vitesse (réduite)  $\beta = v/c$ , la rapidité  $\phi(v)$ , et la célérité  $\gamma\beta = \sinh \phi(v)$ .

## 17. Suppléments

- a) La vitesse réduite  $\beta$  est la vitesse de l'origine du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  donnée par

$$\beta = \frac{dx}{cdt}. \quad (1)$$

La célérité est définie par  $dx/cdt'$  mais comme  $dt' = dt/\gamma$  on a

$$\frac{dx}{cdt'} = \gamma \frac{dx}{cdt} = \gamma \beta = \sin \phi(v). \quad (2)$$

- b) Pendant un intervalle de temps propre  $cdt'$  pour la fusée, la vitesse de la fusée par rapport au référentiel fixe passe de  $v$  à  $v + dv$ . L'accroissement de vitesse est donné par

$$dv' = \frac{v + dv - v}{1 + \frac{(v+dv)(-v)}{c^2}} \simeq \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3)$$

- c) L'intégrale de  $dv'$  pendant la phase d'accélération donne **a revoir sérieusement**

$$V' = \int_0^{V'} dv' = \int_0^V \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c \tanh^{-1} \frac{V}{c} = c \phi(V) \quad (4)$$

- d) Interpréter le résultat. À quoi correspond la rapidité en physique galiléenne non relativiste. ???

## 17.2. Champ électromagnétique et électrodynamique non linéaire

On considère l'électrodynamique du vide. Au champ électromagnétique on associe un tenseur d'énergie-impulsion

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + F^{\mu\rho} F_{\rho}{}^{\nu} \right), \quad (5)$$

- a) Vérifier que ce tenseur est symétrique et qu'il est conservé  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Pour cela on utilisera l'équation (1), ainsi que les équations du mouvement des potentiels  $\phi$  et  $\vec{A}$  trouvées dans l'exercice précédant et la condition de jauge (9).
- b) Quels invariants relativistes peut-on construire avec les composantes du tenseur de Faraday  $F^{\mu\nu}$  ?
- c) Exprimer en fonction de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  l'énergie  $\mathcal{E} = \int d^3x T^{00}$  et l'impulsion  $P^i = \int d^3x T^{0i}/c$  du champ.

On va s'intéresser maintenant au problème de l'électrodynamique non linéaire, où la dynamique du champ électromagnétique résulte de l'action de Dirac–Born–Infeld :

$$\mathcal{S}_{\text{DBI}} = -\frac{\kappa^2}{\mu_0 c} \int d^4x \left( \sqrt{1 + \frac{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{2\kappa^2} - \left( \frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}}{8\kappa^2} \right)^2} - 1 \right) \quad (6)$$

$$= -\frac{\kappa^2}{\mu_0 c} \int dt d^3x \left( \sqrt{1 - \frac{\vec{E}^2 - \vec{B}^2 c^2}{\kappa^2 c^2} - \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{\kappa^4 c^2}} - 1 \right). \quad (7)$$

où  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  est le tenseur totalement antisymétrique tel que  $\varepsilon^{0123} = 1$  et  $\varepsilon^{ijkl}$  = signature de la permutation  $(ijkl)$ .

d) Montrer que cette dernière restitue l'action de Maxwell–Faraday à la limite  $E/c, B \ll \kappa$ .

e) Montrer que cet expression implique l'existence d'un champs électrique limite. Faire un parallèle avec l'action classique et relativiste d'une particule ponctuelle.

### 17.2.1. Contexte historique

Born et Infeld ont proposé cette action dans les années 1930 afin de supprimer le problème de l'énergie propre infinie d'un électron existant dans la théorie linéaire de Maxwell. Cette action joue un rôle important pour la description d'objet étendu (les D-branes) en théorie des cordes.

## 17.3. Effet Doppler-Fizeau transverse

### a terminer

À cause du phénomène de contraction des longueurs les solides n'existent pas en relativité restreinte contrairement au cas de la physique Galiléenne classique.

Les quanta de lumière sont représentés par les photons. La correspondance onde–corpuscule est traduite par la relation de de Broglie entre l'impulsion et la longueur d'onde

$$\vec{p} = \frac{h}{\lambda} \vec{e} \quad (8)$$

où  $\vec{e}$  est un vecteur unité selon la direction de propagation, et la relation de Planck pour l'énergie

$$E = h\nu. \quad (9)$$

La relation  $E = |\vec{p}| c$  implique la relation de dispersion entre la fréquence et la longueur d'onde

$$\lambda\nu = c. \quad (10)$$

## 17. Suppléments

Un signal lumineux est émis par une source  $S$ , en mouvement uniforme de vitesse  $\vec{V}_S$  par rapport à un observateur  $O$ . En utilisant la loi de transformation du quadrivecteur énergie-impulsion pour les particules de masse nulle, montrer qu'il existe un effet Doppler–Fizeau transverse, se produisant lorsque la réception du signal par l'observateur a lieu perpendiculairement à la trajectoire de la source ( $\vec{e} \perp \vec{V}_S$ , où  $\vec{e}$  caractérise la direction de réception).

- Fournir la relation entre  $\nu$  (fréquence reçue) et  $\nu_S$  (fréquence émise).
- Déterminer l'aberration entre  $\vec{e}$  (direction de réception) et  $\vec{e}_S$  (direction d'émission).
- Pourquoi cet effet est-il purement relativiste ?

### 17.4. Le cylindre en rotation

Un cylindre dont l'axe est confondu avec l'axe  $Ox$  du référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$  est animé d'un mouvement de rotation autour de cet axe, de vitesse angulaire constante  $\omega$ .

Montrer que dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , en mouvement uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$  de vitesse  $\vec{V} = V\vec{e}_x$ , le cylindre paraît tordu autour de son axe, d'un angle  $\alpha = \frac{B\omega}{c}$  par unité de longueur propre. Quelle est la vitesse angulaire mesurée dans  $\mathcal{R}'$  ?

### 17.5. Particule uniformément accélérée



FIGURE 1. – Vue de l'accélérateur linéaire du SLAC à Standford et de l'anneau du LHC au CERN

Comme application de cette relation on se propose de calculer la vitesse acquise dans un champ électrique uniforme. On admettra que si le champ électrique  $\vec{E}$  est uniforme et si une particule chargée a une vitesse parallèle à  $\vec{E}$  alors son accélération dans le référentiel instantané est constante et vaut  $q\vec{E}/m$  (où  $q$  est la charge de la particule et  $m$  sa masse).



- a) Quelle est la vitesse acquise par l'électron à la sortie du tube dans le cas classique et relativiste ?
- b) Exprimer le facteur de boost en fonction de la différence de la différence de potentiel électrique entre l'entrée de l'électron au repos et la sortie de l'électron accéléré. Interpréter le résultat.
- c) On s'intéresse à la collision d'un électron ainsi accéléré avec un positron au repos dans le laboratoire. On appelle référentiel du centre de masse, le référentiel où la somme des impulsions des deux particules est nulle  $\underline{P}' = (E'/c, \vec{0})$ . Déterminer la vitesse  $\beta$  de ce repère par rapport à celui du laboratoire.
- d) Calculer l'énergie  $E'$  totale avant collision dans le repère de centre de masse. Exprimer cette énergie en fonction de l'énergie  $E$  initiale de l'électron accéléré.
- e) Dans le tunnel du CERN, un anneau circulaire de 27 km de long, le LEP permettait de faire tourner des faisceaux d'électrons et d'anti-électrons en sens inverse. Le LHC permet maintenant d'y faire tourner des protons et des anti-protons. Calculer l'énergie du système dans le référentiel du centre de masse. Pourquoi un tel dispositif plutôt qu'un accélérateur linéaire ?

**A donner ou pas - est-ce trop long ?**

### 17.5.1. Effet Doppler-Fizeau

Les quanta de lumière sont représentés par les photons. Cette correspondance onde-corpuscule est véhiculée par les relations de Planck ( $E = h\nu$ ) et de de Broglie ( $\vec{p} = \vec{e}h/\lambda$  où  $\vec{e}$  est un vecteur unité caractérisant la direction de propagation).

- a) Déterminer la relation entre la fréquence  $\nu$  et la longueur d'onde  $\lambda$
- b) En utilisant la loi de transformation du quadrivecteur énergie-impulsion pour les particules de masse nulle, retrouver l'effet Doppler-Fizeau et l'aberration pour un observateur  $O$  qui reçoit le signal lumineux émis par une source  $S$  en mouvement par rapport à  $O$ , à vitesse  $\vec{V}_S$ .
- c) Examiner les cas particuliers où l'émission a lieu (i) parallèlement (source s'éloignant ou se rapprochant) et (ii) perpendiculairement à la trajectoire de la source, la notion de parallèle ou perpendiculaire se rapportant à l'observateur  $O$  ( $\vec{e} \parallel$  ou  $\perp \vec{V}_S$ , où  $\vec{e}$  caractérise la direction de réception).
- d) Quelles sont, dans les deux cas, les limites newtoniennes pour ces effets au premier ordre en  $V_S/c$  ?

## 17.6. Calcul tensoriel

On considère la "métrique" de l'espace temps de Minkowski, i.e. le tenseur deux fois covariant, noté  $\eta_{\mu\nu}$  qui permet de calculer la "distance" infinitésimale  $ds$  entre deux événements situés respectivement aux coordonnées  $x^\mu$  et  $x^\mu + \Delta x^\mu$ . On a (on utilise partout la convention de sommation d'Einstein) :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad (11)$$

Dans un référentiel inertiel, on a

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

où on considère  $\mu$  comme un indice de ligne et  $\nu$  comme un indice de colonne (dans une notation matricielle). On considère ensuite la "métrique inverse" notée  $\eta^{\mu\nu}$  et qui vérifie par définition

$$\eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho. \quad (13)$$

Dans la suite, on souhaite démontrer divers résultats donnés lors de la PC3, sur la métrique et la possibilité de faire "monter" ou "descendre" les indices. Dans cette optique, on ne supposera pas connus ces résultats. On supposera uniquement connues les lois de transformation des composantes d'un tenseur.

- a) Expliquer pourquoi  $\eta_{\mu\nu}$  est un tenseur deux fois covariant. Montrer que, comme le suggère la notation,  $\eta^{\mu\nu}$  est un tenseur deux fois contravariant.
- b) Étant donné un vecteur  $u^\mu$ , on note  $u_\mu$  la quantité définie par

$$u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu \quad (14)$$

Montrer que les  $u_\mu$  sont les composantes d'un covecteur (tenseur une fois covariant). On dit ainsi que la métrique permet d'abaisser les indices et on note avec le même symbole le vecteur et le covecteur que l'on a fabriqué comme indiqué avant.

- c) On considère maintenant un covecteur  $v_\mu$  et on définit les quantités  $v^\mu$  par

$$v^\mu = \eta^{\mu\nu} v_\nu \quad (15)$$

Montrer que les  $v^\mu$  sont les composantes d'un vecteur (tenseur une fois contravariant). On dit ainsi que la métrique permet de faire monter les indices.

- d) Quel tenseur obtient-on quand on fait monter un indice de la métrique comme ci-dessous. Même question si on fait descendre un indice de la métrique inverse ? Justifier la notation  $\eta^{\mu\nu}$  pour la métrique inverse.

- e) On note  $\partial_\mu$  l'opérateur  $\partial/\partial x^\mu$ . Montrer que l'action de cet opérateur sur un tenseur  $p$  fois covariant et  $q$  fois contravariant  $T_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_q}$  permet de fabriquer un tenseur  $p+1$  fois covariant et  $q$  fois contravariant dont les composantes seront notées comme indiqué ci-dessous

$$\partial_\mu T_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_q} := T_{\mu_1 \dots \mu_p, \mu}^{\nu_1 \dots \nu_q} \quad (16)$$

- f) On note  $\partial^\mu$  l'opérateur  $\eta^{\mu\nu} \partial_\nu$ . Quel est la variance du tenseur

$$\partial^\mu T_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_q} := T_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_q, \mu} \quad ? \quad (17)$$

- g) On considère le tenseur 4 fois covariant de composantes notées  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  qui vérifie (dans un certain référentiel inertiel)

$$\epsilon_{\mu\sigma(1)\mu\sigma(2)\mu\sigma(3)\mu\sigma(4)} = \epsilon(\sigma) \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \quad (18)$$

pour toute permutation  $\sigma$  de signature  $\epsilon(\sigma)$ . Montrer que les composantes  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  de ce tenseur sont les mêmes dans tout référentiel inertiel. Cela reste-t-il vrai si on ne demande pas que les transformations de Lorentz soient orthochrones et propres ?

## 17.7. Création de paires

On considère la réaction où deux particules donnent un photon

$$1 + 2 \rightarrow \gamma \quad (19)$$

- a) Montrer que la réaction ci-dessus est impossible si les deux particules ne sont pas de masse nulles. Conclure que la réaction est impossible.  
b) Est-ce qu'un photon peut se désintégrer en deux particules ?

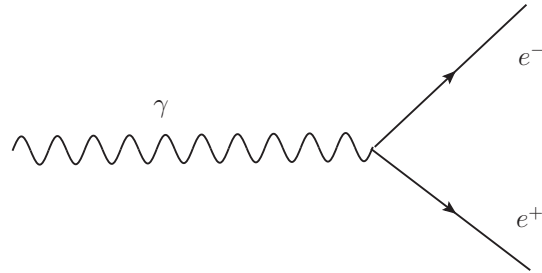


FIGURE 2. – Création d'une paire électron-positron à partir d'un photon.

Le phénomène de création de paire  $\gamma \rightarrow e^- + e^+$ , fut observées pour la première fois dans la chambre à brouillard de Patrick Blackett, ce qui lui valut le prix Nobel de Physique en 1948.

## 17. Suppléments

- a) Montrer que pour que la réaction de la figure 2 soit permise par les contraintes cinématiques il est nécessaire qu'elle implique au moins une troisième particule
- b) Trouver la valeur de l'énergie minimale du photon pour que la réaction aie lieu

### 17.8. Collision élastique de deux protons

On considère deux protons, l'un (le proton 2), au repos dans un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ , a une énergie  $E_0$ . Ce proton est heurté par un second proton (proton 1) d'énergie cinétique  $x E_0$  dans  $\mathcal{R}$ . On note  $\mathcal{R}'$  le référentiel du centre de masse du système. On note  $\alpha_1$  (respectivement  $\alpha'$ ) l'angle dans  $\mathcal{R}$  (respectivement dans  $\mathcal{R}'$ ) entre la vitesse du proton 1 après le choc et sa vitesse avant le choc. De même on note  $\alpha_2$  l'angle dans  $\mathcal{R}$  entre la vitesse du proton 2 après le choc et la vitesse du proton 1 avant le choc. On note  $\theta$  l'angle (dans  $\mathcal{R}$ ) entre les vitesses des deux protons après le choc. Soit  $\vec{u}$  la vitesse du référentiel du centre de masse par rapport à  $\mathcal{R}$ .

- 2.1 Montrer que l'énergie cinétique se conserve dans une collision élastique de deux particules identiques.
- 2.2 Soit  $E'$  l'énergie du proton incident mesurée dans  $\mathcal{R}'$  avant le choc. Exprimer  $E'$  en fonction de  $E_0$  et  $x$  et en déduire l'expression du facteur de Lorentz  $\gamma$  du mouvement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  en fonction de  $x$ . Application : Calculer  $\gamma$  et  $x$  pour le LHC où l'énergie  $E'$  vaut 7 TeV (on prendra la masse du proton égale à  $1 \text{ GeV}/c^2$ ). Comparer ce résultat aux énergies des rayons cosmiques de "ultra-haute énergies" ( $10^{20} \text{ eV}$ ).
- 2.3 Montrer que dans  $\mathcal{R}'$  les particules conservent individuellement leur énergie et la norme de leur 3-impulsion.
- 2.4 Donnez l'expression de l'angle  $\theta$  en fonction des énergies cinétiques  $K_1$  et  $K_2$  dans  $\mathcal{R}$  des deux protons après le choc.
- 2.5 Que devient cette formule dans la limite non relativiste ? Même question dans la limite ultra-relativiste.
- 2.6 Exprimer  $K_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $K_2$  et  $\alpha_2$  en fonction de  $\alpha'$  et  $\gamma$ , En déduire une expression de  $\theta$  en fonction de  $\alpha'$  et  $\gamma$ .

### 17.9. Effet Tcherenkov

Lorsqu'une particule chargée traverse un milieu transparent d'indice de réfraction  $n$  tel que la vitesse de la lumière dans le milieu,  $\tilde{c} = c/n$  soit inférieure à la vitesse  $v$  de la particule, on constate la production de photons dans le milieu :  $q \rightarrow q + \gamma^*$ .

- Caractériser les photons  $\gamma^*$  dans un milieu transparent : déterminer leur masse carrée  $m_{\gamma^*}^2$  et leur vitesse  $v_{\gamma^*}$  en fonction de la fréquence  $\nu$  et de l'indice  $n$  du milieu<sup>1</sup>. Que vaut le produit  $\tilde{c}v_{\gamma^*}$  ?
- On se place dans le référentiel du laboratoire, où le milieu matériel transparent est au repos.
  - Partant des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion dans le milieu d'indice  $n$ , déterminer l'angle maximum d'émission du photon Tcherenkov par rapport à la direction d'incidence de la particule chargée,  $\theta_{\max}$ , en fonction de l'énergie  $E$  de la particule incidente, de sa masse  $m$  et de  $n$ , ou, de manière équivalente, en fonction de  $\tilde{c}$  et de  $v_e$  (vitesse de la particule incidente).
  - Sous quel angle sont émis les photons Tcherenkov les plus énergétiques ? Quelle est leur énergie en fonction de  $E$ ,  $v_e$  et  $\tilde{c}$  ?
  - A quelle énergie seuil de la particule chargée,  $E_{\min}$ , l'effet Tcherenkov apparaît-il ? Que vaut  $\theta_{\max}$  à cette énergie ? Que vaut cet angle à la limite d'énergie infinie ?
  - Comment utiliser l'effet Tcherenkov pour mesurer l'énergie des particules chargées ?

On considère l'effet Tcherenkov produit par des électrons ( $m_e = 0,51 \text{ MeV}/c^2$ ) traversant l'eau ( $n \approx 4/3$ ). Déterminer l'énergie minimum de l'électron incident pour produire un photon Tcherenkov.

## 17.10. Mouvement dans un potentiel central

Dans une base cartésienne, les composantes du vecteur moment cinétique  $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$  sont

$$\begin{pmatrix} \ell_x \\ \ell_y \\ \ell_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yp_z - zp_y \\ zp_x - xp_z \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix}. \quad (20)$$

où  $p_x$ ,  $p_y$  et  $p_z$  sont les moments canoniquement conjugués aux variables<sup>2</sup>  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

a) Vérifier que  $\{\ell_x, \ell_y\} = \ell_z$  et  $\{\ell_i, \ell^2\} = 0$ , pour tout  $i \in \{x, y, z\}$ .

On montre aisément que  $\{\ell_x, \ell_y\} = \ell_z$  et  $\{\ell_x, \ell^2\} = \{\ell_y, \ell^2\} = \{\ell_z, \ell^2\} = 0$ ,  $\forall i$ . En l'absence de champ magnétique,  $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$  est la quantité de mouvement.

1. Rappel :  $E_{\gamma^*} = h\nu$ ,  $p_{\gamma^*} = h/\lambda$  et  $\lambda\nu = \tilde{c}$ .

2. Noter que  $p_x$ ,  $p_y$  et  $p_z$  ne s'identifient pas nécessairement aux moments généralisés adoptés pour étudier le problème. Ces derniers sont canoniquement conjugués aux coordonnées généralisées choisies qui ne sont pas forcément des coordonnées cartésiennes.

## 17. Suppléments

On définit les coordonnées sphériques au moyen des relations suivantes :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (21)$$

Dans la suite, on adoptera ce système de coordonnées.

- b) Écrire la fonction de Lagrange décrivant le mouvement d'un corps de masse  $m$  dans un champ de force dérivant d'un potentiel à symétrie sphérique. Déterminer les moments généralisés et déduire la fonction d'Hamilton.
- c) Exprimer  $\ell_x, \ell_y, \ell_z$  ainsi que  $\vec{\ell}^2$  en fonction des variables d'état  $r, \vartheta, \varphi$  et  $p_r, p_\vartheta, p_\varphi$ .
- d) Montrer que  $\{\ell_x, \ell_y\} = \ell_z$  et  $\{\ell_x, \vec{\ell}^2\} = \{\ell_y, \vec{\ell}^2\} = \{\ell_z, \vec{\ell}^2\} = 0$ .
- e) Des relations  $\{\ell_i, \vec{\ell}^2\} = 0$ , déduire que  $\{\ell_x, H\} = \{\ell_y, H\} = \{\ell_z, H\} = \{\vec{\ell}^2, H\} = 0$ , pour tout  $i \in \{x, y, z\}$ . Cette propriété reflète l'invariance par rotation et la conservation du moment cinétique.
- f) Dans le cas où la symétrie par rotation serait brisée, combien de composantes du moment cinétique pourraient satisfaire  $\{\ell_i, H\} = 0$  ?

L'analyse qui précède permet de tirer des conclusions déterminantes sur la nature de la trajectoire d'un corps dans un potentiel central :

- d) Sans autre développement technique, montrer que la trajectoire est toujours située dans un plan qui passe par l'origine, centre du champ de force.
- e) Montrer que le problème se réduit la dynamique d'un particule à une dimension dans un potentiel effectif que l'on interprétera.
- f) Peut-on effectuer une transformation canonique telle que  $\ell_x, \ell_y$  et  $\ell_z$  soient les variables de moment dans l'espace des phases ?

Adoptons  $p_r, \ell_z$  et  $\ell = \|\vec{\ell}\|$  pour moments généralisés. Les coordonnées canoniquement conjuguées seront  $r, \chi$  et  $\psi$ .

- i) Par transformation de Legendre, déterminer la fonction de Lagrange et interpréter les nouvelles coordonnées  $\chi$  et  $\psi$ . Quel est le rôle du moment  $\ell_z$  ?
- j) Démontrer la seconde loi de Kepler – *conservation de la vitesse aréolaire*.

Le problème est finalement réduit à deux dimensions.

- k) Trouver une nouvelle intégrale première et intégrer les équations par quadratures.
- l) Identifier un potentiel de force effectif et interpréter ses différents termes.
- m) Décrire qualitativement l'extension des trajectoires dans la direction radiale, en particulier si  $V = -k/r$  (problème de Coulomb ou problème de Kepler).

## 17.11. Le paradoxe de la perche et du hangar

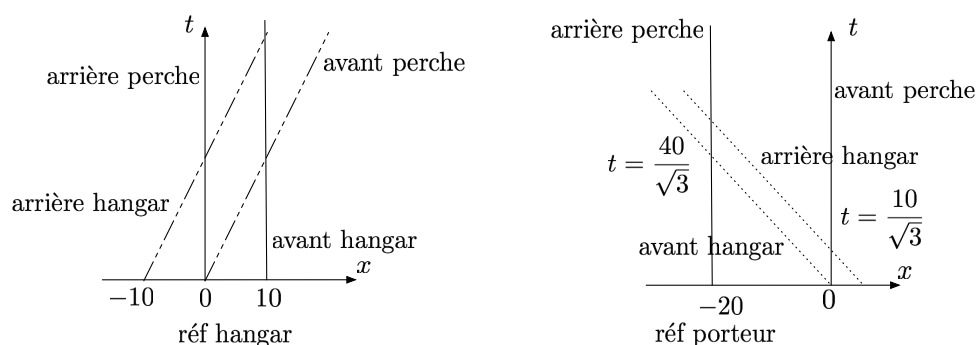
Un étudiant est perplexe et écrit « La relativité doit être fausse. Considérons un perche de 20 mètres de long transportée si rapidement dans la direction qui lui est parallèle qu'elle ne paraît plus avoir que 10 mètres de long dans le système du laboratoire. À un moment donné, on peut donc la faire entrer toute entière dans un hangar de 10 mètres de long. Plaçons-nous cependant dans le système de référence du coureur qui la porte. Pour lui, le hangar est contracté à la moitié de sa longueur. Comment un perche de 20 mètres pourrait-elle entrer dans un hangar de 5 mètres ? Et cette conclusion impossible à retenir ne démontre-t-elle pas que la relativité renferme quelque part une faille logique fondamentale ? ».

Expliquer clairement et en détails comment faire entrer la perche et le hangar dans la théorie de la relativité sans qu'il en résulte de contradiction.

Pour cela on tracera les diagrammes d'espace-temps pour le porteur et pour le hangar.

### 17.11.1. Solution

Le facteur de contraction de Lorentz est de 2,  $\gamma = 2 = 1/\sqrt{1 - \beta_r^2}$ . Donc la vitesse relative entre les 2 référentiels est de  $\beta_r = \sqrt{3}/2$ . On peut donc tracer les diagrammes d'espace-temps suivants



On résout donc ce paradoxe de la manière suivante : dans le référentiel du porteur, l'avant de la perche quitte le hangar avant que l'arrière n'entre dans le hangar. Ainsi le porteur n'observe jamais que la perche est contenu dans le hangar.

## 17.12. Objets de déplaçant plus vite que la lumière

### faire le dessin de la regle

Les équations de transformations de Lorentz n'ont plus aucune signification si la vitesse relative des deux systèmes de référence est supérieure à celle de la lumière. Ceci implique que la masse, l'énergie et l'information ne peuvent être transmises d'un

## 17. Suppléments

endroit à l'autre plus vite que la vitesse de la lumière. Vérifier cette implication pour les exemples suivants.

- a) Le paradoxe des ciseaux. Une très longue baguette droite fait un angle  $\Phi$  avec l'axe  $Ox$  et se déplace vers le bas à une vitesse uniforme  $\beta^y$ . Trouver la vitesse du point d'intersection du bord inférieur de la baguette avec l'axe  $Ox$ . Peut-elle être supérieure à la vitesse de la lumière ? Peut-elle servir à transmettre un message de l'origine à un point éloigné de l'axe  $Ox$ .
- b) Admettons que la même baguette soit initialement au repos et que le point d'intersection  $A$  soit confondu avec l'origine. On frappe la zone de la baguette qui est voisine de l'origine avec un marteau qui va de haut en bas. Le point d'intersection se déplace vers la droite. Peut-on utiliser ce mouvement pour transmettre un message à une vitesse supérieure à celle de la lumière ?
- c) On fait tourner rapidement un projecteur très puissant de telle façon que son faisceau décrive un plan. Les observateurs  $A$  et  $B$  sont placés dans ce plan et à la même distance du projecteur, mais relativement éloignés l'un de l'autre. À quelle distance du projecteur doivent se trouver  $A$  et  $B$  pour que le faisceau balaye le plan de  $A$  vers  $B$  plus vite qu'un signal lumineux émis et reçu entre les deux mêmes points ? Avant de gagner leurs positions, les deux observateurs ont reçu les instructions suivantes :
  - i) Pour  $A$  : Quand vous verrez le faisceau du projecteur, tirez une balle en direction de  $B$
  - ii) Pour  $B$  : Quand vous verrez le faisceau lumineux, plongez parce que  $A$  vous aura tiré dessus.Dans ces conditions, l'alarme ne passera-t-elle pas de  $A$  à  $B$  plus vite que la lumière ?
- d) Les constructeurs de certains oscilloscopes prétendent enregistrer des vitesses supérieures à celle de la lumière. Est-ce possible ?

### 17.12.1. Correction

- a) Quand la règle bouge d'une distance  $\Delta y = \beta^y \Delta t$ , le point  $A$  bouge d'une distance  $\Delta x = \Delta y / \tan \Phi = \beta^y \Delta t / \tan \Phi$ . La vitesse du point d'intersection  $A$  est donc  $\beta_A = \Delta x / \Delta t = \beta^y / \tan \Phi$ . Pour toutes valeurs de  $\beta^y$  on peut toujours choisir  $\Phi$  suffisamment faible pour que  $\beta_A > 1$  donc que  $A$  bouge plus vite que la vitesse de la lumière. Mais ce point ne contient pas d'information physique, pas plus qu'un message est échangé par deux horloges programmées pour sonner à un intervalle de temps tel que la lumière ne peut voyager entre ces deux horloges. Dans l'exemple décrit ici, la règle doit être accélérée pendant une période de temps très longue pour atteindre la vitesse voulue. Et l'observateur à l'origine n'a pas la possibilité de transmettre de l'information sur l'axe  $Ox$ .



### 17.12. Objets de déplaçant plus vite que la lumière

- b) Dans ce cas le point d'intersection peut bouger vers la droite à une vitesse inférieure ou égale à la vitesse du son dans la règle. C'est une vitesse très inférieure à celle de la lumière.

- c) Soit  $\omega$  la vitesse angulaire, exprimée en radians par seconde, du projecteur. Pour que le faisceau aille plus vite de la lumière il faut que

$$\omega r > c$$

L'alarme n'a pas pu aller de  $A$  vers  $B$ , car on peut pas transmettre de signal plus vite que la vitesse de la lumière.

- d) Oui, il est possible de mesurer des vitesses supérieures à celles de la lumière comme pour le cas du faisceau du projecteur.

#### 17.12.2. Contexte physique

Des exemple de propagation apparente plus vite que la vitesse de la lumière sont observables en astrophysique avec les jets de matière émis par les galaxie.

Par exemple voici les images prises par le télescope Hubble de la propagation du jet émit par la galaxie M87 observé sur plusieurs années.

## Superluminal Motion in the M87 Jet

